Volterra 积分方程和泛函微分方程的振动性*

冯滨鲁 俞元洪
(山东矿业学院基础部, 泰安 271019) (中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

摘　要　本文建立了 Volterra 积分方程和一阶泛函微分方程解的振动准则.

关键词　Volterra 积分方程, 泛函微分方程振动性

分类号　AMS(1991) 45J05, 34K15/CCL O175.3

1　引　言

在泛函微分方程理论中, 解的振动性起着重要作用. 对于这一方向已有许多作者研究(例如, 可参看[1]). 但是, 对于积分方程的振动理论, 已知的结果还比较少[4].

考虑 Volterra 积分方程

$$x(t) = f(t) - \int a(t,s)g(s,x(s))\,ds,\quad t \geq 0, \tag{1}$$

其中 $f \in C([0,\infty),R)$, $g \in C([0,\infty)\times R, R)$, $a: [0,\infty)\times[0,\infty)\to R$, 在 $0\leq t<\infty$, $0\leq s\leq t$ 上非负连续, 当 $s>t$ 时, $a(t,s)=0$.

只考虑方程(1)在 $[0,+\infty)$ 上连续且在无穷远的任一邻域内不恒为零的解. 方程(1)的解称为振动的, 如果它有任意大的零点; 否则, 称它为非振动的. 这一定义是相同于微分方程的情形.

本文将给出方程(1)的一些振动准则, 它不同于文[4]的结果. 所用方法亦可应用于研究下列泛函微分方程

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,|x(g_i(t))|^{\alpha}\operatorname{sgn}x(g_i(t)) = q(t)x(t) + r(t),\quad \alpha > 0, \tag{2}$$

的振动性.

本文结果指出, 当 Volterra 积分方程(1)和泛函微分方程(2)的强迫项是强振动时, 它们的每一个解都是振动的.

2　积分方程的振动

定理 1　假设

(i)　$xg(t,x)>0$, $x\neq 0$, $t\geq 0$;

(ii)　$\int a(t,s)\,ds$ 有界, 对任一固定的 $b>0$;

* 1995 年 4 月 21 日收到. 国家自然科学基金资助项目.

(iii) $\lim_{t\to\infty}\sup f(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty}\inf f(t)=-\infty$.

则方程(1)的一切解振动.

证明 设 $x(t)$ 是(1)的非振动解, 则存在 $T>0$ 使得当 $t\geq T$ 时有 $x(t)>0$(或 <0).

设 $x(t)>0$, $t\geq T$, 有

$$
\begin{aligned}
0<x(t)&=f(t)-\int^{t}a(t,s)g(s,x(s))ds\\
&=f(t)-\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds-\int^{t}a(t,s)g(s,x(s))ds\\
&\leq f(t)-\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds,\quad t\geq T.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

注意到 $\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds<M\int^{T}a(t,s)ds<\infty$, 其中 $M=\sup_{0\leq t\leq T}g(t,x(t))$. 则不等式(3)与条件 $\lim_{t\to\infty}\inf f(t)=-\infty$ 矛盾.

其次, 设 $x(t)<0$, $t\geq T$, 则有

$$
\begin{aligned}
0>x(t)&=f(t)-\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds-\int^{t}a(t,s)g(s,x(s))ds\\
&\geq f(t)-\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds,\quad t\geq T.
\end{aligned}
$$

上式与条件 $\lim_{t\to\infty}\sup f(t)=\infty$ 矛盾. □

例 1 考虑积分方程

$$x(t)=f(t)-\int^{t}a(t,s)g(s,x(s))ds, \tag{4}$$

其中 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}(t\sin t+\cos t-1)+\cos^3 t$, $g(s,x(s))=[sx(s)]^{\frac{1}{3}}$, $a(t,s)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}s^{\frac{2}{3}}$, $0\leq t<\infty$, $0\leq s\leq t$ 且 $a(t,s)=0$, $s>t$. 此时, 定理 1 的三个条件均满足. 因此, 方程(4)的一切解都振动. 事实上, $x(t)=\cos^3 t$ 就是方程(4)的一个解.

注 文[4]未能给出方程(1)实际振动的例子.

定理 2 假设

(i) $xg(t,x)>0$, $x\neq 0$ 且对固定的 t, $g(t,x)$ 关于 x 单增;

(ii) $g(t,x)$ 有界, $0\leq t<\infty$, $|x|\leq R$, $R>0$ 固定;

(iii) $-\infty<\lim_{t\to\infty}\int^{t}a(t,s)g(s,-K)ds<0$, 对任意固定的 $c>0$ 和 $K>0$;

(iv) $h(t)=\int^{b}a(t,s)ds$ 有界, $0\leq t<\infty$, 对任意固定的 $b>0$;

(v) $\lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$.

则方程(1)的一切有界解振动.

证明 设 $x(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上方程(1)的有界非振动解, 则存在常数 $K>0$ 和 $T>0$, 使得当 $t\in[0,\infty)$ 时有 $|x(t)|\leq K$, 当 $t\geq T$ 时恒有 $x(t)>0$(或 <0). 设 $0<x(t)\leq K$, $t\geq T$, 则有

$$
\begin{aligned}
0<x(t)&=f(t)-\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds-\int^{t}a(t,s)g(s,x(s))ds\\
&\leq f(t)+\left|\int^{T}a(t,s)g(s,x(s))ds\right|\leq f(t)+M\int^{T}a(t,s)ds
\end{aligned}
$$

$$\leq f(t) + MN, \tag{5}$$

其中$M = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} |g(t, x(t))|$, $N = \sup\limits_{t \geq T} \int^{T} a(t, s) ds < \infty$. 不等式(5)与假设$\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = -\infty$矛盾.

其次, 设$x(t) < 0$, $t \geq T$. 则

$$\begin{aligned} -K \leq x(t) &= f(t) - \int^{T} a(t, s) g(s, x(s)) ds - \int^{t} a(t, s) g(s, x(s)) ds \\ &\leq f(t) + M \int^{T} a(t, s) ds - \int^{t} a(t, s) g(s, -K) ds \\ &\leq f(t) + MN + D, \end{aligned} \tag{6}$$

其中$K > 0$, $D = -\lim\limits_{t \to \infty} \int^{t} a(t, s) g(s, -K) ds$, M和N的定义如前. 在(6)中令$t \to \infty$取极限产生矛盾. □

3 微分方程的振动

定理 3 假设

(i) $p_i, r \in C([0, \infty), R)$, $p_i(t) \geq 0$, $i \in I_n = \{1, \cdots, n\}$;

(ii) $g_i \in C^1([0, \infty), R)$, $g_i'(t) \geq 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} g_i(t) = \infty$, $i \in I_n$;

(iii) $q \in C([0, \infty), R)$;

(iv) $\lim\limits_{t \to \infty} \sup \int^{t} p_i(u) \exp\left(\int^{g_i(u)} q(s) ds\right)^{\alpha} \exp\left(-\int^{u} q(s) ds\right) du = \infty$, 对某一$i \in I_n$和任一固定$b > 0$, $c > 0$;

(v) 存在函数$Q \in C^1([0, \infty), R)$, 使得$Q'(t) = r(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(u) du\right)$, $t \geq t_0 > 0$, 且$\lim\limits_{t \to \infty} Q(t) = 0$. 则方程(2)的每一解$x(t)$是振动的, 或者满足等式$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right) = 0$.

证明 令$z(t) = x(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right)$. 则根据假设(i)-(iii), 方程(2)成为

$$\begin{aligned} & x'(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right) + x(t)[-q(t)] \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right) \left[\exp\left(\int_0^{g_i(t)} q(s) ds\right)\right]^{\alpha} |z(g_i(t))|^{\alpha} \operatorname{sgn} z(g_i(t)) \\ & = r(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right), \quad t \geq t_0 > 0. \end{aligned}$$

因此, 有

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{n} L_i(t) |z(g_i(t))|^{\alpha} \operatorname{sgn} z(g_i(t)) = Q'(t), \tag{7}$$

其中

$$L_i(t) = p_i(t) \left[\exp\left(\int_0^{g_i(t)} q(s) ds\right)\right]^{\alpha} \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right)$$

和

$$Q'(t) = r(t) \exp\left(-\int_0^{t} q(s) ds\right).$$

设 $x(t)$ 是方程(2)的非振动解, 则可设对充分大的 t 有 $x(t)>0$. 此时, $z(t)$ 是(7)的非振动解且对充分大的 t 有 $z(t)>0$. 令 $\overline{x}(t)=z(t)-Q(x)$, 则 $\overline{x}(t)$ 满足方程

$$\overline{x}'(t)+\sum_{i=1}^{n}L_i(t)[\overline{x}(g_i(t))+Q(g_i(t))]^{\alpha}=0. \tag{8}$$

故对充分大的 t 有 $\overline{x}'(t)<0$. 由假设(i), (ii)和(v), 并注意到 $z(t)=\overline{x}(t)+Q(t)>0$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\overline{x}(t)=k,\ k\ 为常数$$

若 $k<0$, 则对充分大的 t 有 $z(t)<0$, 此与假设 $z(t)>0$ 矛盾. 若 $k>0$, 得到

$$z(g_i(t))=\overline{x}(g_i(t))+Q(g_i(t))\geq\frac{k}{2},\ i=1,\cdots,n,$$

对充分大的 t 成立. 由上式和(8)产生

$$\overline{x}'(t)+\sum_{i=1}^{n}L_i(t)\left(\frac{k}{2}\right)^{\alpha}\leq 0, \tag{9}$$

对不等式(9)从 t_0 到 t 积分, 有

$$\overline{x}(t)-\overline{x}(t_0)+\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{0}L_i(s)ds\right)\left(\frac{k}{2}\right)^{\alpha}\leq 0, \tag{10}$$

在(10)中令 $t\to\infty$, 取上极限产生与假设(iv)矛盾. 因此, 得到 $k=0$, 即

$$\lim_{t\to\infty}z(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)\exp\left(-\int_{0}q(s)ds\right)=0.$$

□

定理 4 设定理 3 的假设(i)和(iii)成立, 且有

(ii)′ $g_i\in C^1([0,\infty),R)$, $\lim_{t\to\infty}g_i(t)=\infty$, $i\in I_n$;

(v)′ 存在函数 $Q\in C^1([0,\infty),R)$, 使得 $Q'(t)=r(t)\exp\left(-\int_0 q(u)du\right)$, $t\geq t_0>0$, 且 $\lim_{t\to\infty}\sup Q(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty}\inf Q(t)=-\infty$. 则方程(2)的每一个解均是振动的.

证明 设 $x(t)$ 是方程(2)的非振动解. 不妨设对充分大的 t 有 $x(t)>0$, 即存在 $T>0$ 使得当 $t\geq T$ 时有 $x(t)>0$. 令 $z(t)=x(t)\exp\left(-\int q(u)du\right)$, 则由假设(i), (iii), (ii)′和(v)′, 有

$$z'(t)+\sum_{i=1}^{n}L_i(t)[z(g_i(t))]^{\alpha}=Q'(t), \tag{11}$$

其中

$$L_i(t)=p_i(t)\left[\exp\left(\int^{g_i(t)}q(s)ds\right)\right]^{\alpha}\exp\left(-\int q(s)ds\right)$$

和

$$Q'(t)=r(t)\exp\left(-\int q(s)ds\right).$$

由(11)得到 $z'(t)\leq Q'(t)$, $t\geq T$. 从 $t_0\geq T$ 到 t 对上式积分产生

$$0<z(t)\leq z(t_0)+Q(t)-Q(t_0),\ t\geq t_0. \tag{12}$$

不等式(12)与 $\lim_{t\to\infty}\inf Q(t)=-\infty$ 相矛盾.

如果假设对充分大的 t 有 $x(t)<0$, 则得到 $0>z(t)\geq z(t_1)+Q(t)-Q(t_1)$, $t\geq t_1\geq T$. 与 $\lim_{t\to\infty}\sup Q(t)=\infty$ 矛盾. □

推论 5　设定理 4 的假设(i), (iii)和(ii) 成立, 并且

(vi)　$f \in C(R, R)$, $xf(x) > 0$, $x \neq 0$, f **非减;**

(v)″ **存在函数** $Q \in C^1([0, \infty), R)$, **使得** $Q'(t) = r(t)$, $t > 0$ **且** $\limsup_{t\to\infty} Q(t) = \infty$, $\liminf_{t\to\infty} Q(t) = -\infty$. **则方程**

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f(x(g_i(t))) = r(t), \tag{13}$$

的一切解振动

注　推论 5 推广了文[2]的定理 3.

例 2　考虑方程

$$x'(t) + t x^{\frac{1}{3}}(t + 2\pi) = t\cos t - 3\cos^2 t \sin t, \quad t \geq \pi \tag{14}$$

由于函数

$$Q(t) - Q(t_0) = \int_{t_0}^{t} Q'(u)\,du = \int_{t_0}^{t} (u\cos u - 3\cos^2 u \sin u)\,du$$

$$= t\sin t + \cos t + \cos^3 t - t_0 \sin t_0 - \cos t_0 - \cos^3 t_0, \quad t_0 \geq \pi$$

满足定理 4 的全部条件, 故方程(14)的一切解振动. 事实上, $x(t) = \cos^3 t$ **就是(14)的一个解.**

参 考 文 献

[1] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham and B. G. Zhang, *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Marcel Dekker, New York, 1987.

[2] H. Onose, *Nonoscillation of nonlinear first order differential equations with forcing term*, Hiroshima Math. J., 16(1986), 617-628.

[3] M. Rama Mohana Rao and P. Srinivas, *Asymptotic behavior of solutions of Volterra integro-differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 94(1985), 55-60.

[4] N. Parhi and Niyati Misra, *On oscillatory and nonoscillatory behavior of solutions of Volterra integral equations*, J. Math. Anal. Appl., 94(1983), 137-149.

On the Oscillation of Volterra Integral Equations and Functional Differential Equations

Feng Binlu

(Shandong Mining College, Tai'an 271019)

Yu Yuanhong

(Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract

We establish sufficient conditions for the oscillation of all solutions of Volterra integral equations and first order functional differential equations.

Keywords　Volterra integral equation, functional differential equation, oscillation.