第 18 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

带Morita 对偶的偏序集环*

朱　彬　　王文举
(北京师范大学数学系, 100875)　(首都经贸大学经济信息管理系, 北京 100026)

摘　要　设 R 是有 1 的结合环, I 是任意偏序集, RI 是 R 上 I 的偏序集环. 本文考虑了带对偶的偏序集环, 得到: RI 带Morita 对偶当且仅当 R 带Morita 对偶. 推广了已有的在 R 是有限偏序集时的有关结果.

关键词　偏序集环, 离散线性紧, Morita 对偶
分类号　AMS(1991) 16W50/CCL O153.3

设 R 是有单位元 1 的结合环, 对于局部有限偏序集 S (即 S 是偏序集且 $\forall x, y \in S, x \leq y$, 集合 $[x, y] = \{z \in S \mid x \leq z \leq y\}$ 是有限集), 令 $I(S, R) = \{f: S \times S \to R \mid \forall a \not\leq b, f(a, b) = 0\}$, $I(S, R)$ 在下面运算之下是具有单位元的结合环:

$$(*)\quad \begin{aligned} &\forall f, g \in I(S, R), \\ &(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y), \\ &(f \cdot g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y). \end{aligned}$$

称 $I(S, R)$ 是 R 上 S 的 Incidence 环[2], [3]. 围绕 Incidence 环的同构问题, 最近有一系列的研究[2], [3]. 为了处理一般的偏序集(不一定是局部有限的), 文[1]引进了偏序集环的概念. 设 I 是任意偏序集, 令 $RI = \{f: I \times I \to R \mid$ 只对有限多个 $(a, b) \in I \times I$, $f(a, b) \neq 0$, 且 $\forall a \not\leq b, f(a, b) = 0\}$, RI 关于上面 $(*)$ 式所定义的运算成为一个结合环. 当 $|I| < \infty$ 时, RI 与 R 上 I 的 Incidence 环一致, 有单位元; 当 $|I| = \infty$ 时, RI 是无单位元的结合环. 本文试图对任意的偏序集 I, 讨论带Morita 对偶的偏序集环 RI, 推广了[2], [3]的结果.

根据[5], 称一个结合环 A (不一定有单位元) 有局部单位元, 如果对 A 的任意有限子集, 均可找到 A 的一个形如 eAe 的子环 ($e^2 = e \in A$), 使得 eAe 包含此有限子集; 称 A 是函子环[4] (或带足够多的幂等元), 如果 A 中存在正交幂等元集 $\{e_i\}_{i \in I}$, 使得 $A = \bigoplus_{i \in I} eA = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$, 此时 $\{e_i\}_{i \in I}$ 称为 A 的完全幂等元集. 对于带局部单位元的环 A, 所考虑的左模均为酉模, 即 $AM = M$. 由[5], 称左 A-模 M 是离散线性紧(简记为 dlc), 如果对 A 的任意幂等元 e, M 的子模簇 $\{M_k\}_{k \in J}$, 当 $\{ex_k, M_k\}_{k \in J}$ 是有限可解系时(即对 J 的任意有限子集 F, 均有 $x_F \in M$, 使 $x_F - ex_k \in M_k$, $\forall k \in F$), 它必为可解系(即存在 $x \in M$, 使得 $x - ex_k \in M_k$, $\forall k \in J$). 称 M 是局部离散线性紧(ldlc), 如果 M 的任意有限生成子模均是 dlc 的.

命题 1　设 A 是带局部单位元的环, $L \leq_A M$, 则 M 是 dlc 当且仅当 L, M/L 均是 dlc.

* 1995 年 6 月 10 日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 (⇒) 由定义知L 是 d l c, 下证M/L 是 d l c, 设 $e^2=e\in A$, $\{M_k/L\}_{k\in J}$是M/L 的任意子模簇, 使得$\{e\overline{x_k},M_k/L\}_{k\in J}$是有限可解的, 从而$\{ex_k,M_k\}_{k\in J}$是有限可解的, 由$M$ 是 d l c 知有 $x\in M$, 使得 $x-ex_k\in M_k$, $\forall k\in J$, 从而 $\overline{x}-e\overline{x_k}\in M_k/L$, M/L 是 d l c 的.

(⇐) 设 $e^2=e\in A$, $\{ex_k,M_k\}_{k\in J}$是M 的一个有限可解系, 对 J 的任意有限子集 F, 令 $x_F\in M$, 使得 $x_F-ex_k\in M_k$, $\forall k\in F$, 设 $\Sigma=\{F\subseteq J\mid F$ 是有限的$\}$, $M_F=\bigcap_{i\in F}M_i$, 则$\{ex_k,M_k\}_{k\in J}\cup\{ex_F,M_F\}_{F\in\Sigma}$是$M$ 的一个有限可解系, 由M/L 是 d l c 以及$\{e\overline{x_j},(M_j+L)/L\}_{j\in J\cup\Sigma}$是有限可解系可知有 $x+L\in M/L$, 使得 $x-ex_j\in M_j+L$, $\forall j\in J\cup\Sigma$, 从而$L\cap(ex_j-x+M_j)\neq\varnothing$, $\forall j\in J\cup\Sigma$, 令 $y_j=ex_j-x-x_j'\in L\cap(ex_j-x+M_j)$, 这里 $x_j'\in M_j$, 则 $ey_j=ex_j-ex-ex_j'\in L\cap(ex_j-ex+M_j)$, 从而$L\cap(ex_j-ex+M_j)=ey_j+(M_j\cap L)$, 从而得到$L$ 的一个有限可解系$\{ey_j,M_j\cap L\}_{j\in J}$, 由$L$ 是 d l c 有 $y\in L$, 使得 $y-ey_j\in M_j\cap L$, $\forall j\in J$. 从而 $y+ex-ex_j=y-ey_j-ex_j'\in M_j$, $\forall j\in J$, 故$\{ex_j,M_j\}_{j\in J}$是可解系, M 是 d l c.

推论 2 设$_AM=L_1\oplus\cdots\oplus L_n$, 则$_AM$ 是 d l c 当且仅当L_i 是 d l c $\forall i$.

证明 利用命题 1 以及数学归纳法可得.

以下设R 是有 1 的结合环, $A=RI$ 是R 上 I 的偏序集环.

当 $x,y\in I$, $x\leq y$ 时, 令 $e_{x,y}$表示RI 中(x,y)-位置为 1, 其它位置取值为 0 的元素, 易见 $e_{x,x}^2=e_{x,x}$.

命题 3 $RI=\bigoplus_{x\in I}RIe_{x,x}=\bigoplus_{x\in I}e_{x,x}RI$, 即$RI$ 是函子环. $\{e_{x,x}\}_{x\in I}$是RI 的正交幂等元完全集, 且若 $f\in RI$ 是幂等元, 则$\forall x\in I$, $f(x,x)$均是R 的幂等元.

证明 利用RI 的定义直接计算可得上结论.

命题 4 RI 的 Jacobson 根$J(RI)=\{f\in RI\mid f(x,x)\in J(R),\forall x\in I\}$, 这里$J(R)$是$R$ 的 Jacobson-根.

证明 $U(RI)=\{f\in RI\mid f(a,a)=0,\forall a\in I\}$是$RI$ 的诣零理想, 从而$U(RI)\subseteq J(RI)$, 令 $N=\{f\in RI\mid f(x,x)\in J(R),\forall x\in I\}$, $N\lhd RI$, 下证N 是左拟正则的.

$\forall f\in N$, 将 f 写成

$$f=f_1+f_2,\ f_2\in U(RI),\ f_1(x,y)=\begin{cases}f(x,x), & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases},$$

由于$f_1(x,x)=f(x,x)\in J(R)$, $\forall x\in I$, $J(R)$ 是拟正则理想, 从而可找到$g_1\in RI$, $\forall x\neq y$, $g_1(x,y)=0$, 且

$$f_1(x,x)+g_1(x,x)+f_1(x,x)g_1(x,x)=f_1(x,x)+g_1(x,x)+g_1(x,x)f_1(x,x)=0,$$

从而

$$f_1+g_1+f_1g_1=f_1+g_1+g_1f_1=0.$$

由于$f_2+g_1f_2\in U(RI)$, 则有 $f_2+g_1f_2$ 是拟正则元, 有 $g_2\in RI$, 使得

$$f_2+g_1f_2+g_2+g_2(f_2+g_1f_2)=f_2+g_1f_2+g_2+(f_2+g_1f_2)g_2=0,$$

从而

$$(f_1+f_2)+(g_1+g_2+g_2g_1)+(g_1+g_2+g_2g_1)(f_1+f_2)=0,$$

即说明$f=f_1+f_2$ 是左拟正则的, 从而N 是左拟正则理想, $N\subseteq J(RI)$.

又$\forall f\in J(RI)$, 将 f 表成$f=f_1+f_2$, 其中$f_1\in U(RI)$, $f_2(x,y)=\begin{cases}f(x,x), & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases}$, 从

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

而 $f_2 \in J(RI)$, 则有 $\forall a \in I$, $f_2(a,a)$ 是右拟正则元, 令 $M_{(a,a)} = \{r \in R \mid \exists f \in J(RI)$, 使得 $f(a,a) = r\}$, 易知 $M_{(a,a)} \lhd R$, 且是 R 的拟正则理想, 故 $f_2(a,a) \in M_{(a,a)} \subseteq J(R)$, 故 $J(RI) = N$. □

设 M 是左 R-模, $x_0 \in I$, 令 $[M]_{x_0} = \{f: I \times I \to M \mid f(x_0, x_0) \in M$, 其它位置取值为 0$\}$, 按通常加法, $[M]_{x_0}$ 是加群, 且在下面模运算之下成为左 RI-模: $\forall f \in RI$, $g \in [M]_{x_0}$,

$$(f \cdot g)(x,y) = \begin{cases} f(x_0,x_0) \cdot g(x_0,x_0), & \text{当 } x = y = x_0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

命题 5 如果 M 是内射左 R-模, 则 $[M]_{x_0}$ 是内射 RI-模

证明 由命题 3 以及[4]中命题 1.1 知, 只须验证 $\forall x \in I$, 从 Re_{xx} 的任意 RI-子模到 $[M]_{x_0}$ 的 RI-同态均能扩充为从 Re_{xx} 到 $[M]_x$ 的同态

直接验证可知对 $Re_{x,x}$ 的任意 RI-子模 Q, 均存在 R 的一组子加群 $\{L_{y,x}\}_{y \le x}$, 使 $R \cdot L_{x,x} \subseteq L_{y,x}$, $\forall y \le x$, 且 $Q = \{f \in RIe_{x,x} \mid f(y,x) \in L_{y,x}, \forall y \le x\}$.

设 $\varphi: Q \to [M]_{x_0}$ 是任意 RI-同态

1° 如果 $\varphi = 0$, 则 φ 可扩充为从 $RIe_{x,x}$ 到 $[M]_{x_0}$ 的同态

2° 如果 $\varphi \ne 0$, 则必有 $x = x_0$, 否则 $x \ne x_0$, 由 $\varphi(Q) \subseteq [M]_{x_0}$, 从而 $\varphi(Q) = e_{x_0}\varphi(Q) = \varphi(e_{x_0}Q) = \{0\}$ 矛盾. 此时 $\forall f \in Q$, 将 f 写为 $f = f_1 + f_2$, f_1 在 (x,x)-位置取值为 $f(x,x)$, 其它位置取值为 0, $f_2 = f - f_1$, $f_1, f_2 \in Q$, 且 $\varphi(f) = e_x\varphi(f) = \varphi(e_x f) = \varphi(f_1)$, 由 $\varphi: Q \to [M]_{x_0}$ 可得映射 $\psi: L \to M$, $\psi(r) = \varphi(f_r)(x_0, x_0)$, 这里 f_r 是 (x_0, x_0)-位置为 r, 其它位置为 0 的元素, 易知 ψ 是 R-同态, 从而 ψ 可扩充为 $\overline{\psi}: R \to M$, 定义 $\overline{\varphi}: RIe_{x,x} \to [M]_{x_0}$, $\overline{\varphi}(f)(x_0, x_0) = \overline{\psi}(f(x_0, x_0))$, 易知 $\overline{\varphi}$ 是 RI-同态, 且 $\overline{\varphi}|_Q = \varphi$, 故 $[M]_{x_0}$ 是内射 RI-模 □

命题 6 若 RI 是左 l d l c 环, 则 RI 的左单模具有形式 $[(R/J)\bar{e}]_{x_0}$, x_0 是 I 中某个元素, $e^2 = e \ne 0$ 是 R 的幂等元

证明 设 S 是单 RI-模, 由[5]中命题 3 知 $S \cong RIf/J(RI)f$, $f^2 = f \in RI$, 由命题 3, 不妨设 $x_1, \cdots, x_n \in I$, $e_i = f(x_i, x_i) \ne 0$, $e_i^2 = e_i$, 从而 $S \cong RIf/J(RI)f \cong (RI/J(RI)) \cdot \bar{f} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} [(R/J)\bar{e}_i]_{x_i}$, 其中 $[(R/J)\bar{e}_i]_{x_i}$ 的定义如命题 5 前所指, 由 S 是单模, 故 $n = 1$, $S \cong [(R/J)\bar{e}]_{x_0}$. □

命题 7 设 M 是左 R-模, 如果 M 是 d l c 则 $[M]_{x_0}$ 是 d l c 左 RI-模, $\forall x_0 \in I$.

证明 $\forall x \in I$, $e_{x,x}[M]_{x_0} \cong \begin{cases} 0, & x \ne x_0 \\ M, & x = x_0 \end{cases}$, 从而 $e_{x,x}[M]_{x_0}$ 是 d l c 左 R-模, 由[5]知 $[M]_{x_0}$ 是 d l c 左 RI-模 □

定理 8 设 R 是有单位元的结合环, I 是任意偏序集, 若 R 是线性紧的, 则 RI 是 l d l c

证明 由命题 3 可知 RI 的任意有限生成子模 N 均含在 RI 的左理想 $N_0 = RIe_{x_1,x_1} \oplus \cdots \oplus RIe_{x_n,x_n}$ 中, 从而要证 N 是 d l c 只须证明 N_0 是 d l c 只须证 $\forall i$, RIe_{x_i,x_i} 是 d l c 由于 $\forall e_{x,x}$, $e_{x,x}RIe_{x_i,x_i} \cong \begin{cases} 0, & x \ne x_i \\ R, & x = x_i \end{cases}$, 及 R 是离散线性紧的, 由[5]知 RIe_{x_i,x_i} 是 d l c, 故 RI 是 l d l c □

定理 9 设 R 是有单位元的结合环, I 是任意偏序集, 则 RI 带 Morita 对偶当且仅当 R 带 Morita 对偶

证明 (⇒) RI 带 Morita 对偶, 则知 $e_{x,x}RIe_{x,x}$ 带 Morita 对偶[5], 而 $R \cong e_{x,x}RIe_{x,x}$, 故 R 带 Morita 对偶

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(⇐) 只须证明: RI 是 ldlc 以及对任意单左 RI-模 S, S 的内射包 $E(S)$ 是 dlc [5].

若 R 带 Morita 对偶, 则 $_RR$ 是 lc, 从而由定理 8, RI 是 ldlc 并由命题 6, 任意单左 RI-模 S 均具有形式 $S \cong [(R/J)\bar{e}]_{x_0}$, $e^2 = e \in R$, $(R/J)\bar{e}$ 是有限生成半单 R/J-模, 从而是有限多个单 R-模之直和. 从而 $(R/J)\bar{e}$ 的内射包 $E_R((R/J)\bar{e})$ 是有限多个单 R-模的内射包之直和, 而 R 是带 Morita 对偶的环, 故单 R-模的内射包是 dlc[6], 故 $E_R(R/J\bar{e})$ 是 dlc 左 R-模. 由命题 7, $[E_R(((R/J)\bar{e})]_{x_0}$ 是 dlc 左 RI-模, 而 $[(R/J)\bar{e}]_{x_0}$ 的内射包 $E([(R/J)\bar{e}]_{x_0})$ 同构于 $[E_R((R/J)\bar{e})]_{x_0}$ 的某个直和项. 从而必为 dlc (由命题 1, 推论 2). 故 RI 带有 Morita 对偶 □

衷心感谢刘绍学教授的指导与帮助.

参 考 文 献

[1] 刘绍学, 偏序集代数的同构问题, 数学进展, 18(1989), 461—464.

[2] K. R. Fuller, J. K. Haack, *Duality for semigroup rings*, J. Pure App. Alg., 22(1981), 113-119.

[3] J. K. Haack, *Isomorphisms of incidence rings*, Ill. J. of Mathematics, 28: 4(1984).

[4] Kunio Yamagata, *On Morita duality for additive group valued functors*, Comm. in Alg., 7: 4(1979), 367-392.

[5] P. N. Anh, C. Menini, *Morita duality for rings with local units*, J. of Alg., 164(1994), 632-641.

[6] Xue Weimin, *Rings with Morita duality*, Lecture Notes in Math, 1523.

[7] 刘绍学, 环与代数, 科学出版社, 1982.

Poset Rings with Morita Duality

Zhu Bin

(Dept. of Math. Beijing Normal University, 100875)

Wang Wenju

(Capital University of Economics and Business, Beijing 100026)

Abstract

Let R be an associate ring with identity, I be a poset, RI be the poset ring of I over R. The following result is obtained: RI has Morita duality iff R has Morita duality. This extends the known result about the poset ring in the case I that is finite.

Keywords poset ring, discret linear compact, Morita duality.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.