第 18 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

随机分形的测度性质*

胡晓予
(中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

摘　要　本文主要介绍随机过程样本轨道、Hawkes 模型、统计自相似集、统计自仿射集的测度性质, 同时也将介绍一些离散分形的结果. 文中还列出一些尚未解决的问题.

关键词　Hausdorff 维数, Packing 维数, Hausdorff 测度, Packing 测度, Stable 过程
分类号　AMS(1991) 28A78, 28A80, 60J30/CCL O174.12

随机分形的研究始于 1940 年左右, 虽然那时还没有这个词. Paul Lévy 是这方面工作的开创者. 他首先研究 Brown 运动的轨道性质, 后来 Besicovitch 和 Taylor 加入这个行列. 综合他们三人的工作可得出 Brown 运动的零集的 Hausdorff 维数是 1/2 ([4], [25]). 这大概是随机分形方面最早的结果了. 目前随机分形的研究主要集中在以下四个方面:

1　随机过程样本轨道的分形性质;
2　几类典型随机集的分形性质(如随机递归集, 康托集的随机重排);
3　分形上随机过程的构造;
4　离散分形.

1　随机过程样本轨道的分形性质

文中用 $\varphi\text{-}m$, $\varphi\text{-}p$ 分别表示由测度函数 φ 产生的 Hausdorff, packing 测度, 用 dim 和 Dim 分别表示 Hausdorff 和 packing 维数, 用 $\underline{\dim}_B$ 和 $\overline{\dim}_B$ 分别表示下和上 box-counting 维数.

随机过程样本轨道的分形性质的主要研究对象是 Lévy 过程, 高斯场和稳定场等. 在 Lévy 过程中, 研究得最多的是它的一类特例: Stable 过程. 众所周知, Brown 运动和 Cauchy 过程都是 Stable 过程的特例. Stable 过程轨道分形性质(包括维数问题与测度问题)已基本上解决了. Brown 运动的相应问题解决得更彻底, 但对一般 Lévy 过程的研究还比较粗糙, 还有不少有意义的问题可做. 轨道的分形性质主要是指随机过程的像集, 逆像集, 图集, 重点集的维数和测度性质, 当然也包括碰撞等问题. 下面介绍一些经典结果和尚待解决的问题.

McKean 在[27]证明了: 若记 $X^{\alpha,d}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的指数为 $0<\alpha\leq 2$ 的 stable 过程, 则 $\dim(X^{\alpha,1}([0,1]))=\min(\alpha,1)$ a.s., 其中 $X(E)=\{y=X(t): t\in E\}$ 是过程 X 在 E 上的像集. 仿

* 1995 年 3 月 1 日收到. 1997 年 10 月 20 日收到修改稿. 国家教委留学回国人员基金和国家教委优秀青年教师基金的资助.

McKean 的证明可得到

$$\dim(X^{\alpha,d}([0,1])) = \mathrm{Dim}(X^{\alpha,d}([0,1])) = \min(\alpha, d) \quad \text{a. s}$$

特别地，若 $\alpha< d, \alpha\neq 1$，定义

$$\varphi(h) = \begin{cases} h^{\alpha}\log|\log h|, & \text{如果 } X^{\alpha,d} \text{ 为 } A \text{ 型 stable 过程}, \\ h^{\alpha}(\log|\log h|)^{1-\alpha}, & \text{如果 } X^{\alpha,d} \text{ 为 } B \text{ 型 stable 过程}, \end{cases}$$

则总存在常数 $c> 0$，使得对几乎所有的 ω 有:

$$\varphi\text{-}m(X^{\alpha,d}([0,1])) = ct, \quad t> 0.$$

若 $X^{1,d}$ 为对称 Cauchy 过程，则 $X^{1,d}$ 的像集 $X^{1,d}([0,1])$ 的确切 Hausdorff 测度函数为:

$$\psi(h) = \begin{cases} h(|\log h|)(\log\log|\log h|), & d=1, \\ h\log|\log h|, & d\geq 2 \end{cases}$$

以上二结果均来自于[33].

Pruitt 和 Taylor[30]在上述结果发表十年后证明了：对于不对称的 Cauchy 过程 $X^{1,d}(d\geq 2)$，其像集的确切 Hausdorff 测度函数为 $h/|\log h|, h< e^{-1}$.

1985 年 Taylor 和 Tricot[36]提出了 packing 维数和 packing 测度的概念，并证明了取值于 $\mathbf{R}^d(d\geq 3)$ 的 Brown 运动 $B^d(t)$ 满足:

$$(h^2/\log|\log h|)\text{-}p(B^d([0,1])) = \lambda_d \text{ a. s}, \quad \lambda_d> 0 \text{ 为常数}$$

随后，Taylor 在[35]中证明了 stable 过程 $X^{\alpha,d}(\alpha< d, \alpha\neq 2)$ 的像集的 packing 测度非零即 ∞，而且

$$h^{\alpha}g(h)\text{-}p(X^{\alpha,d}([0,1])) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{a. s} \quad \text{当} \int_{0+}\frac{g^2(h)}{h}dh \begin{cases} < \infty, \\ = \infty, \end{cases}$$

其中 $g(h)$ 为一测度函数.

平面上 Brown 运动的性质比较特殊，LeGall 和 Taylor[6]证明了:

$$s^2|\log s|h(s)\text{-}p(B^2([0,1])) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{a. s} \quad \text{当} \sum_k h(2^{-2^k}) \begin{cases} < \infty, \\ = \infty, \end{cases}$$

其中 $h(s)$ 为测度函数.

而对 $X^{\alpha,1}(1< \alpha\leq 2)$ 的零集 Z，其确切 Hausdorff 测度函数为 $s^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log|\log s|)^{\frac{1}{\alpha}}$([37])，其 packing 测度非零即 ∞，且

$$s^{1-\frac{1}{\alpha}}h(s)\text{-}p(Z\cap[0,1]) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{a. s} \quad \text{当} \int_{0+}\frac{h^2(s)}{s}ds \begin{cases} < \infty, \\ = \infty, \end{cases}$$

其中 $h(s)$ 为测度函数[5].

Taylor 在[34]中研究了 Brown 运动的零集和图集的 Hausdorff 维数，其后 Blumenthal 和 Getoor[5]找到了直线上对称稳定过程的零集和图集的 Hausdorff 维数. Jain 和 Pruitt[19]则找到了 transient 稳定过程的图集的确切 Hausdorff 测度函数，而直线上常返稳定过程的图集的确切 Hausdorff 测度函数的结果则来自于 Pruitt 和 Taylor 工作[29]. 不对称 Cauchy 过程的图集的 Hausdorff 测度则分别在[30]，[14]中被 Pruitt 和 Taylor，Hawkes 解决. 1988 年 Rezakhenlou 和 Taylor[31]合作研究了稳定过程的图集的 packing 测度.

令 $(G_rX)(E) = \{(s, X(s)): s\in E\}$ 是过程 $X(t)$ 在集合 E 上的图集，简记 $(G_rX)(t) =$

$(G_r X)([0,t))$. 如前, 设 $X^{\alpha,d}$是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的指数为 α 的稳定过程, 则存在常数 $c=c(\alpha,d)>0$ 使得对几乎所有 ω 有

$$\varphi\text{-}m((G_r X^{\alpha,d})(t))=ct,\ \forall t>0,$$

其中

$$\varphi(s)=\begin{cases} s^{2-\frac{1}{\alpha}}(\log|\log s|)^{\frac{1}{\alpha}}, & d=1,\ 1<\alpha\le 2,\\ s, & \alpha\le\min(1,d),X^{\alpha,d}\text{不为不对称 Cauchy 过程},\\ s^{\alpha}\log|\log s|, & d>\alpha>1,\\ \dfrac{s}{|\log s|}(s<e^{-1}), & \alpha=1,X^{\alpha,1}\text{为严格不对称 Cauchy 过程}\end{cases}$$

至于相应的packing 测度问题, 除了对称Cauchy 过程和平面上的Brown 运动外, 其余的稳定过程的图集的packing 测度都已被解决[31].

对于 $X^{\alpha,1}(1<\alpha\le 2)$, 若令 $\varphi(t)=t^{2-1/\alpha}\psi(t)$, $\psi(t)$ 为测度函数, 则有:

$$\varphi\text{-}p((G_r(X^{\alpha,1}))([0,1]))=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\text{a.s. 当}\int_{0+}\frac{\psi^{\alpha}(t)}{t}dt\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$$

对 $X^{\alpha,d}(d\ge 2,1<\alpha<2)$, 令 $\varphi(t)=t^{\alpha}\psi(t)$, $\psi(t)$ 如上, 则

$$\varphi\text{-}p((G_r X^{\alpha,d})([0,1]))=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\text{a.s. 当}\int_{0+}\frac{\psi^{\alpha}(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$$

对于 $B^d(t)(d\ge 3)$, 则有

$$\varphi\text{-}p(G_r B^d)(E)=L(E),\ \varphi(t)=t^2(\log|\log t|)^{-1},$$

其中 $E\subset[0,1]$为Borel 集, $L(\cdot)$表示Lebesgue 测度. 对 $X^{\alpha,d}(\alpha<1\le d)$, 令 $\varphi(t)=t$, 则对任意的Borel 集 $E\subset[0,1]$, $\varphi\text{-}p(G_r X^{\alpha,d})(E)=L(E)$.

上述结果均来自[31].

令 $L_k=\{x\in\mathbf{R}^d, x$ 为 $X^{\alpha,d}$的 k 重点$\}$. Taylor[32]和 Fristedt[8]找到了对称稳定过程的重点集的维数:

$$d=3:\quad \dim L_2=2\alpha-3,\ \text{当}\ \alpha>\frac{3}{2},$$

$$d=2:\quad \dim L_k=k\alpha-2(k-1),\ \text{当}\ \alpha>2\left(1-\frac{1}{k}\right),$$

$$\dim L_c=2\ (c\ \text{为连续集的势}),\ \text{当}\ \alpha=2,$$

$$d=1:\quad \dim L_k=k\alpha-(k-1),\ \text{当}\ 1\ge\alpha>1-\frac{1}{k}.$$

他们的证明方法也可导出 $\mathrm{Dim}L_k=\dim L_k$, 所以在上述各情形中, L_k 都是 fractal. 很自然地, 人们希望考虑 L_k 的测度问题. 令

$$D_k=\{(t_1,t_2,\cdots,t_k):\ 0\le t_1<t_2<\cdots<t_k\}.$$

在 $\mathbf{B}(D_k)$ 上定义测度 α_k:

$$\alpha_k(A)=\int_A\delta_0(B(t_1)-B(t_2))\cdots\delta_0(B(t_{k-1})-B(t_k))dt_1\cdots dt_k,$$

其中 $A\in\mathbf{B}(D_k)$, $B(t)$为布朗运动, $\delta_0(x)=1$ 当 $x=0$, 否则为 0. 令 $\beta_k(B)=\alpha_k(\{(t_1,\cdots,k)\in D_k: B(t_1)\in B\})$, LeGall[22]证明了: 对 $B^2(t)$而言, 若 $k\ge 2$ 且

$$h_k(x) = x^2[\log 1/x(\log\log\log 1/x)]^k,$$

则存在正常数 c_k, c_k' 使对 a. s. ω, 对任意 $F \subset \mathbf{B}(\mathbf{B}^2)$,

$$c_k\beta_k(F) \leq h h_k\text{-}m(F \cap L_k) \leq c_k'\beta_k(F).$$

对 $B^3(t)$ 而言, 若 $\varphi(x) = x(\log\log 1/x)^2$, 则存在正常数 c, c' 使对 a. s. ω, 对任意 $F \subset \mathbf{B}(\mathbf{R}^3)$, 有

$$c\beta_2(F) \leq \varphi\text{-}m(F \cap L_2) \leq c'\beta_2(F).$$

Taylor 猜想:

(1) 对 $B^3(t)$ 而言,

$$h_r(\gamma)\text{-}p(L_2) = \begin{cases} \infty, & \gamma \geq 0, \\ 0, & \gamma < 0, \end{cases}$$

对 $B^2(t)$ 而言,

$$h_2(\gamma)\text{-}p(L_k) = \begin{cases} \infty, & \gamma \geq k \\ 0, & \gamma < k. \end{cases}$$

(2) 设 $X^{\alpha, d}$ 是对称稳定过程, 如果 $\alpha > d(1 - 1/k)$, $\eta = k\alpha - d(k-1) > 0$, 则对几乎所有 ω,

$$h_\eta(\beta)\text{-}m(L_k) = \begin{cases} \infty, & \beta > 0, \\ 0, & \beta \leq 0, \end{cases}$$

且

$$h_\eta(\beta)\text{-}p(L_k) = \begin{cases} \infty, & \beta \geq -k/2, \\ 0, & \beta < -k/2 \end{cases}$$

一般从属过程(general subordinator)的像集的测度函数问题均已解决

设 $X(t)$ 为一般的从属过程(即 $X(t)$ 是实值的单调上升的平稳独立增量过程, 还假设 $X(t) = 0$), 则

$$Ee^{-\lambda X(t)} = e^{-tg(\lambda)}, \quad g(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda r})\upsilon(dr),$$

其中 υ 是 X 的 Lévy 测度. 令 η 为 g 的逆函数, 定义

$$h(t) = \frac{\log|\log t|}{\eta(t^{-1}\log|\log t|)},$$

再令 f 为 h 的逆函数(当 t 在 0 附近时). 则[9]证明了:

当 $\upsilon(0, \infty) = \infty$, 有 $f\text{-}m(X([0,1])) = cs, s \geq 0, c > 0$ 是常数

[10]则证明了: 设 φ 为一个测度函数, 再令 ψ 为 φ 的逆, 且 Y_1 和 Y_2 为两个相互独立同分布的一般从属过程, 他们的 Lévy 测度为 υ, 于是 φ 与 ψ 只有下列三种可能:

(1) $\int x\upsilon[\psi(x), \infty)^2 dx < \infty$ 且 $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{t}{\psi(t)} \int^{\psi(t)} x\upsilon(dx) = 0$

$\Rightarrow \limsup\limits_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(Y_1(t) \wedge Y_2(t))}{t} = 0$ a. s. ;

(2) $\int x\upsilon[\psi(x), \infty)^2 dx < \infty$ 且 $0 < \limsup\limits_{t\downarrow 0} \frac{t}{\psi(t)} \int^{\psi(t)} x\upsilon(dx) < \infty$

$\Rightarrow \limsup\limits_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(Y_1(t) \wedge Y_2(t))}{t} = k$ a. s. , $0 < k < \infty$;

(3) $\int x\upsilon[\psi(x), \infty)^2 dx = \infty$ 或 $\limsup\limits_{t\downarrow 0} \frac{t}{\psi(t)} \int^{\psi(t)} x\upsilon(dx) = \infty$

$$\Rightarrow \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(Y_1(t) \wedge Y_2(t))}{t} = \infty \text{ a.s.}$$

进而[10]证明了:

$$\varphi\text{-}p(X([0,1])) = \begin{cases} 0, & (1)\text{成立}, \\ c, & (2)\text{成立}(0< c< \infty), \\ \infty, & (3)\text{成立} \end{cases}$$

Taylor 在[35]中研究了Lévy 过程像集的packing 维数, Pruitt 在[28]中给出了Lévy 过程像集的Hausdorff 维数. 它们不一定相等. 可以找到一个Lévy 过程$X(t)$使$\dim X([0,1]) < \mathrm{Dim} X([0,1])$, 因此$X([0,1])$不是fractal. 很自然地, 我们会问到Lévy 过程像集的测度问题, 下面两个问题是Taylor 提出的:

(1) 对任一个$\mathbf{R}^d$ 中的Lévy 过程, 往证存在测度函数φ, 使$\varphi\text{-}m(X([0,1]))$有限非零, 并给出$\varphi$的构造.

(2) 设X 为一Lévy 过程, X 的Lévy 测度是无穷且X 不含Brown 运动成份, 在什么条件下, 可以找到一个测度函数φ, 使$0< \varphi\text{-}p(X([0,1]))< \infty$ a.s. ?

至于一般Lévy 过程的重点集的存在性已基本解决, 但维数问题和测度问题尚未解决.

称一个随机场$\{X^{(N,d,\gamma)}(t) = (X_1(t), \cdots, X_d(t)), t\in\mathbf{R}^d, X_i(t)\in\mathbf{R}, 1\le i\le d\}$为$(N, d, \gamma)$高斯场, 如果$EX_i(t)= 0$ 且$R_i(s,t)= E\{X_i(s)X_i(t)\}= \frac{1}{2}(\|t\|^{2\gamma}+ \|s\|^{2\gamma}- \|t- s\|^{2\gamma})$. 关于$X^{(N,d,\gamma)}$的全面的结果可参见[1](Adler). 现仅罗列像集和图集维数方面的结果:

$$\dim(A) = \mathrm{Dim}(A) = \min\left(d, \frac{2N}{\gamma}\right),$$

$$\dim(B) = \mathrm{Dim}(B) = \begin{cases} \dfrac{2N}{\gamma}, & \dfrac{2N}{\gamma} < d, \\ N + d\left(1 - \dfrac{1}{2}\gamma\right), & \text{反之}, \end{cases}$$

其中A 为$X^{(N,d,\gamma)}$的像集, B 为图集.

关于高斯场像集的测度函数尚无结果, 即使在$N = 1$ 的情形也没有. 关于高斯过程$X^{(N,d,\gamma)}$的重点集也没见到任何结果. Kahane[20]证明了$X^{(1,1,\gamma)}(0< \gamma< 2)$的水平集的Hausdorff 维数为$1- 1/2\gamma$. Davis[6]则给出了一类高斯过程$X(t)$的零集的确切Hausdorff 测度函数为$\varphi(h)= h^{1-\alpha}(\log|\log h|)^{\alpha}$, 如果

$$E(X(t+h) - X(t))^2 = 4\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{2}\lambda h\right) f(\lambda)\, d\lambda,$$

其中$f(\lambda)= a^{2\alpha}\dfrac{\Gamma(\alpha+ 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha)}(\lambda^2+ a^2)^{-(\alpha+ 1/2)}$, $a> 0$, $0< \alpha< 1/2$ 为常数. 但他未能建立零集的Hausdorff 测度与过程的局部时之间的关系. 自然地, 可考虑水平集的packing 维数和测度.

关于由稳定场产生的随机场的分形性质可参见Ehm[7].

在随机过程轨道的分形性质研究方面, 国内同行也有不少工作, 可参见[26], [38], [41], [43]等.

如果E, F 是两个分形集, $E\times F$ 仍是一个分形集, 其投影则不一定是分形集. 今考虑两个随机过程轨道乘积的投影的分形性质. 一般而言, 如果$\varphi_i\text{-}m(E_i)$ $(i= 1, 2)$是非零有限的,

则

$$\varphi_1\varphi_2\text{-}m(E_1\times E_2)\geq c\varphi_1\text{-}m(E_1)\varphi_2\text{-}m(E_2),\ c>0 \text{ 为常数},$$

但无上界结果 如果 $\psi_i\text{-}p(E_i)$ $(i=1,2)$ 有限非零, 则

$$\psi_1\psi_2\text{-}p(E_1\times E_2)\leq c\,\psi_1\text{-}p(E_1)\psi_2\text{-}p(E_2),\ c>0 \text{ 为常数},$$

但无下界结果 因此研究轨道乘积的 Hausdorff, packing 测度也是很有意义的 [16]证明了:

1 如果 X_1, X_2 是 $\mathbf{R}$ 上指数为 $0<\alpha_1,\alpha_2<1$ 的稳定从属过程, 则 $A=X_1([0,1])\times X_2([0,1])$ 具有有限的 φ-Hausdorff 测度 若 $\alpha_1+\alpha_2\leq 1/2$, A 在 $y=x$ 上的投影为分形集且也具有有限的 φ-Hausdorff 测度, 其中 $\varphi(t)=t^{\alpha_1+\alpha_2}(\log|\log t|)^{2-\alpha_1-\alpha_2}$.

2 若 $\psi(t)=t^{\alpha_1+\alpha_2}h(t)$, $h(t)$ 为测度函数, 则

$$\psi\text{-}p(A)=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\text{a.s. 当}\int_{0+}\frac{h^2(s)|\log h(s)|}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$$

2 几类典型随机集的分形性质

1. Hawkes 模型

1954 年 Besicovitch 和 Taylor[4] 研究了一类紧致集, 它们是通过从单位区间 $[0,1]$ 中移走可数个不相交的开区间而得到的(这些开区间的长度之和为 1). 具体而言, 令 $\{I_n\}$ 是 $[0,1]$ 中两两不交的开区间列, $a_n=|I_n|$, $n\in\mathbf{N}$, 令 $K=[0,1]-\cup_n I_n$, 定义

$$\alpha(\Psi)=\liminf_n \alpha_n\ (\alpha_n \text{ 满足 } n\left(\frac{r_n}{n}\right)^{\alpha_n}=1,\ r_n=\sum_{s\geq n}a_s),$$

$$\beta(\Psi)=\inf\{\beta>0:\sum_n a_n^{\beta}<+\infty\},\ \Psi=\{a_n\}_{n\geq 1}.$$

Besicovitch 和 Taylor 证明了

$$0\leq \dim(K)\leq\alpha(\Psi)\leq\beta(\Psi).$$

当 I_n 们的取法是随机的, 类似的构造就给出一个随机集 Hawkes[15] 首先给出这类集的准确定义: 设 $\{c_n\}$ 为一单调下降序列且 $\sum_n c_n=1$. 在概率空间 $(\Omega,\mathbf{F},P)\equiv([0,1]^{\mathbf{N}},\mathbf{B}[0,1]^{\mathbf{N}},L^{\mathbf{N}})$ (L 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度) 上定义

$$K(\omega)=[0,1]-\cup_n J_n(\omega),$$

其中 $J(\omega)=(l(\omega),l(\omega)+c_n)$, $l(\omega)=\sum_{n\in Q(\omega)}c_n$, $Q_n(\omega)=\{m,\omega_m<\omega_n\}$, $\omega=(\omega_1,\cdots)$.

Hawkes 证明了: $\dim(K(\omega))=\alpha(\Psi)$ a.s. [34] 则证明了 $\mathrm{Dim}(K(\omega))=\beta(\Psi)$ a.s. 当 $\{c_n\}$ 为康托序列时, 我们([33], [34]) 得到更细致的结果:

(1) 若 $\varphi(s)=s^{\alpha}(\log|\log s|)^{1-\alpha}$, $\alpha=\log 2/\log 3$, 则 $0<c_1<\varphi\text{-}m(K(\omega))<c_2<\infty$ a.s., $c_1,c_2>0$ 为常数

(2) 若 $h(s)$ 为一测度函数, $\alpha=\log 2/\log 3$, 则

$$s^{\alpha}h(s)\text{-}p(K(\omega))=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\text{当}\int_{0+}\frac{h^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$$

2 统计自相似集合

Hutchinson 在[18]中研究了自相似集，得到了它的 Hausdorff 维数及确切函数，目前关于自相似集的结果已比较完整．1987 年 Graf[12]在 Hutchinson 模型的基础上，构造了统计自相似集(statistically self similar sets)，现将其定义简述如下：

设 X 是完备可分距离空间，$\mathrm{con}(X)\equiv\{S: X\to X, \mathrm{Lip}(S)<1\}$，在其中赋以逐点收敛的拓扑 $\mathbf{G}$．μ 是 $\mathbf{B}(\mathrm{con}(X)^N)$ 上的概率测度．令 $C=\{0,1,\cdots,N-1\}^{\mathbf{N}_0}$，$\mathbf{N}_0=\{0\}\cup\mathbf{N}$，$C_q=\{0,1,\cdots,N-1\}^q$，$q\geq 1$，$C_0=\{\varnothing\}$．$\forall\sigma=(\sigma_0,\cdots,\sigma_{q-1})\in C_q$，定义 $\sigma|n=(\sigma_0,\cdots,\sigma_{n-1})\ (n\leq q)$，$\sigma*i=(\sigma_0,\cdots,\sigma_{q-1},i)$，$0\leq i\leq N-1$．现设 $D=\bigcup_{q\in\mathbf{N}_0}C_q$，$\Omega=(\mathrm{con}(X)^N)^D$，对 Ω 中之 ω，用如下方法表示：

$$\omega=\{\omega_\sigma: \sigma\in D\},\quad \omega_\sigma=(S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)})\in\mathrm{con}(X)^N.$$

注意，给定 Ω 中一个元素 ω 当且仅当 $\forall\sigma\in D$，给定了 X 中 N 个压缩映射，$S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)}$．最后定义

$$K\equiv K(\omega)\equiv\bigcap_{q\in\mathbf{N}_0}\bigcup_{\sigma\in C_q}\overline{S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|(q+1)}(X)}.$$

Graf 证明了：若 $X\subset\mathbf{R}^d$ 紧且 $(\mathrm{con}(X))^N$ 中(关于 μ)几乎所有的点都是相似映射且满足一定的条件，则 $\dim(K(\omega))=\alpha$ 对 μ^D a.s. 成立，其中 α 满足 $\int\sum_{\rho=0}^{N-1}\mathrm{Lip}(S_\rho)^\alpha d\mu(S_0,\cdots,S_{N-1})=1$．再加一些可接受的条件，Graf 还证明了对几乎所有的 $\omega(\mu^D)$ 而言，$0<s^\alpha\text{-}m(K(\omega))<\infty$．

当 $\omega\in\Omega^*\equiv\{\omega=(\omega_\sigma\equiv\omega_\varnothing, \sigma\in D)\}$ 时，

$$\dim(K(\omega))=\beta,\ 0<s^\beta\text{-}m(K(\omega))<\infty,$$

其中 β 是 $\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Lip}(S_i)^\alpha=1$ 的唯一解．Mauldin 等在[13]中从另一角度定义了统计自相似集，并在一定的条件下求得了其确切 Hausdorff 函数：

设 $(\Omega,\mathbf{F},P)$ 为任一概率空间，给定 $\mathbf{R}^d$ 上的一族随机集

$$J=\{J_\sigma(\omega): \sigma\in D\},$$

它满足以下条件：

(1) $J_\varnothing(\omega)=A$ a.s.，$\forall\sigma, J_\sigma(\omega)\subset A$ a.s.，其中 A 为紧致集，A 的内集的闭包等于 A．如果 $J_\sigma(\omega)$ 非空，则 $J_\sigma(\omega)$ 与 $J_\varnothing(\omega)$ 几何相似；

(2) 对每个 $\sigma\in D$ 和几乎所有的 ω，$J_{\sigma*0},\cdots,J_{\sigma*(n-1)}$ 为 J_σ 的互不重叠的子集；

(3) 随机向量族 $\{\tau_\sigma\equiv\langle T_{\sigma*0},\cdots,T_{\sigma*(N-1)}\rangle, \sigma\in D\}$ 是独立同分布的(其中 $T_{\sigma*i}(\omega)=\mathrm{diam}(J_{\sigma*i})/\mathrm{diam}(J_\sigma(\omega))$，如果 $J_\sigma(\omega)$ 非空．总假设 $T_\varnothing(\omega)=\mathrm{diam}(J_\varnothing)$，$\mathrm{diam}(B)$ 为 B 的直径)．

现在定义

$$K(\omega)\equiv\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\sigma\in C_n}J_\sigma(\omega).$$

Mauldin 等证明了，在一定条件下，对几乎所有 ω，$\varphi(t)=t^\alpha(\log|\log t|)^\theta$ 为 $K(\omega)$ 的确切 Hausdorff 函数，其中 $\alpha=\inf\{\beta>0: E(\sum_{n=0}^{N-1}T_n^\beta)=1\}$，$\theta=1-\alpha/d$．

3. 统计自仿射集

对一般自仿射集的研究还不完整．Falconer，Bedford 等人在这方面有一些工作．Gatzouras 和Lalley[11]构造了统计自仿射集(statistically self affine sets), 并得到了其上和下 box-counting 维数, 而且证明了它们在一般情形下不相等.

3　在分形上构造随机过程

目前, 在一个分形集上构造随机过程通常有两种方法, 第一种途径是: 定义一族取值于分形集的函数, 它们的全体记为 $\Omega\equiv\{\omega(t)\}$, 再定义概率空间 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$, 最后构造随机过程: $X(t, \omega)=\omega(t)$. 这个分形集通常为一个递归集, 如 Sierpinski Gasket, 而这个随机过程通常为 Brown 运动, 自回避过程或自相似扩散过程, 见[21]. 第二种途径是: 利用 Dirichelet forms, 也就是说, 首先在分形集上定义一个算子半群, 然后, 用它们构造随机过程, 见[42].

4　离散分形

经典的分形理论在引进新的维数与测度概念后, 得以进一步刻画 Lebesgue 零测集. 但经典维数如 Hausdorff 维数和 packing 维数, 都不能区别可数集的内涵, 因为任何可数集的 Hausdorff 和 packing 维数都是零. 为了研究不同可数集的内涵, 有必要引进离散维数的概念. Barlow 和 Taylor[3]做了开创性的工作, 并定义了离散的 Hausdorff 和 packing 维数及测度, 并且证明了暂留的严稳定的指数为 α 的随机徘徊的像集是维数为 α 的离散分形. 具体而言, 设 $\{U_n, n\geq1\}$ 是一列独立同分布的随机变量列, 取值于 $\mathbf{Z}^d$ $(d\geq3)$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则 $X_n\equiv\sum_{i=1}^{n}U_i$ 就定义了 $\mathbf{Z}^d$ 上的一个随机徘徊. 当它满足下列条件时,

(1)　$E(U_i)=0, i\geq1$;

(2)　X_n 是暂留的, 即 $|X_n|\to\infty$ a.s.;

(3)　$G(x, y)\equiv E^x\{\#\text{ of } n \text{ with } X_n=y\}$ 满足

$$\frac{c_1}{|x-y|^{d-\alpha}}\geq G(x, y)\geq\frac{c_2}{|x-y|^{d-\alpha}},$$

其中 c_1, c_2 为常数, $x\neq y$, $\alpha\in(0, 2]$;

(4)　设 U_i 的分布在具有指数为 α 的稳定律的吸引场内; 则 X_n 的像集的 Hausdorff 和 packing 维数均为 α[3].

本文作者和胡迪鹤[17]则证明了: 若 $\{X_n, n\geq1\}$ 为满足(4)的取值于 $\mathbf{Z}$ 的常返随机徘徊 $(1<\alpha<2)$, 则它的零集的 Hausdorff 和 packing 维数是 $1-1/\alpha$.

参　考　文　献

[1]　R. J. Adler, *The Geometry of Random Fields*, Wiley, 1981.

[2]　M. T. Barlow and E. A. Perkins, *Brownian Motion on the Sierpinski Gasket*, Probab. Th. Rel. Fields, 79(1988), 543-623.

[3]　M. T. Barlow and S. J. Taylor, *Defining fractal subsets of Z^d*, Proc. London Math. Soc., 64: 3

(1992), 125- 152.

[4] A. S. Besicovitch and S. J. Taylor, *On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure*, J. London Math. Soc., 29(1954), 449- 459.

[5] B. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process*, Illinois J. Math., 4(1960), 370- 375.

[6] P. L. Davis, *The exact Hausdorff measure of the zero set of certain stationary Gaussian processes*, Ann. Prob., 5(1977), 740- 755.

[7] W. Ehm, *Sample function properties of the multi-parameter stable processes*, Z. Wahr., 56(1981), 195- 228.

[8] B. E. Fristedt, *An extension of a theorem of S. J. Taylor concerning multiple points of the symmetric stable process*, Z. Wahr., 9(1967), 62- 64.

[9] B. E. Fristedt and W. E. Pruitt, *Lower functions for increasing random walks and subordinators*, Z. Wahr., 18(1971), 167- 182.

[10] B. E. Fristedt and S. J. Taylor, *The packing measure of a general subordinator*, Probab. Theory Rel. Fields, 92(1992), 493- 510.

[11] D. Gatzouras and S. P. Lalley, *Statistically self-affine sets: Hausdorff and box dimensions*, Preprint.

[12] S. Graf, *Statistically self-similar fractals*, Probab. Th. Rel. Fields, 74(1987), 357- 392.

[13] S. Graf, R. D. Mauldin and S. C. Williams, *The exact Hausdorff measure in random recursive constructions*, Memoirs Amer. Math. Soc., 7(1988) 381, 1- 120.

[14] J. Hawkes, *Measure function properties of the asymmetric Cauchy process*, Mathematika, 17 (1970), 68- 78.

[15] J. Hawkes, *Random re-ordering of intervals complementary to a linear set*, Quart. J. Math., Oxford (2), 35(1984), 165- 172.

[16] X. Hu, *The fractal sets determined by stable processes*, Prob. Theory Rel. Fields, 100(1994), 225- 245.

[17] Hu Xiaoyu and Hu Dihe, *The dimension of the zero set of a recurrent random walk*, Annals of Mathematics(China), 16: 3(1995), 275- 282.

[18] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Ind. Univ. Math. Jour., 30: 5(1981), 713- 747.

[19] M. Jain and W. E. Pruitt, *The correct measure function for the graph of a transient stable process*, Z. Wahr., 9(1968), 131- 138.

[20] J. P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, Heath, 1968.

[21] S. Kusnoka and X. Y. Zhou, *Dirichlet forms on fractals, Poincaré constant and resistance*, Probab. Th. Rel. Fields, 93(1992), 169- 196.

[22] J. F. Legall, *The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points*, Seminar on Stochastic Processes, 1986.

[23] J. F. LeGall, J. S. Rosen and N. R. Shich, *Multiple points of Lévy processes*, Ann. Prob., 17 (1989), 503- 515.

[24] J. F. LeGall and S. J. Taylor, *The packing measure of planar Brownian motion*, Seminar on Stochastic Processes, 1986.

[25] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvements Browniens*, (Gauthier-Villars, 1948).

[26] Liu luqin, *The Hausdorff dimension of the image, graph and level sets of self-similar process*,

Stochastics and Quantum Mechanics, Worldscientific Press, 1992
[27] P. H. Mckean, *Sample functions of stable processes*, Ann. Math., 61: 3(1955), 564- 579.
[28] W. E. Pruitt, *The Hausdorff dimension of the range of a process with stationary independent increments*, Jour. Math. Mech., 19(1969), 371- 378.
[29] W. E. Pruitt and S. J. Taylor, *Sample path properties of processes with stable components*, Z. Wahr., 12(1969), 267- 289.
[30] W. E. Pruitt and S. J. Taylor, *Hausdorff measure properties of asymmetric Cauchy processes*, Ann. Prob., 5(1977). 608- 615.
[31] F. Rezakhanlou and S. J. Taylor, *The packing measure of the graph of a stable process*, Astérisque (1988), 157- 188.
[32] S. J. Taylor, *Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process*, Z. Wahr., 5 (1966), 247- 264.
[33] S. J. Taylor, *Sample path properties of a transient stable process*, Jour. Math. Mech., 16: 11 (1967), 1229- 1246.
[34] S. J. Taylor, *The α-dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path*, Proc. Camb. Phil. Soc., 511(1985), 265- 274.
[35] S. J. Taylor, *The use of packing measure in the analysis of random sets*, Proceedings of the 15th Symposium on Stochastic Processes and Applications, (Springer Lecture Notes, 1986).
[36] S. J. Taylor and C. Tricot, *Packing measure, and its evaluation for a Brownian path*, Trans. Amer. Math. Soc., 288(1985), 679- 699.
[37] S. J. Taylor and J. G. Wendel, *The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process*, Z. Wahr., 6(1966), 170- 180.
[38] **陈雄，二参数**Ornstein-Uhlenbeck **过程图集及像集的**Hausdorff **维数，数学学报**，32(1989)，433 - 438.
[39] **胡晓予，康托集随机重排的**Hausdorff **测度，中国科学**，24: 8(1994).
[40] **胡晓予，康托集随机重排的**packing **测度，中国科学**，24: 9(1994).
[41] **胡迪鹤、刘禄勤、肖益民、吴军、赵兴球，随机分形，数学进展**，1995，No. 2
[42] **周先银，平面布朗运动的重点，数学年刊**，13A (1992).
[43] **赵兴球，稳定分量过程图集的**packing **测度结果，分形理论及其应用，中国科技大学出版社**，1993.

The measure properties of random fractals

Hu Xiaoyu

(Inst. Appl. Math., The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

This paper discusses the measure properties of the sample pathes of stochastic processes, Hawkes model, statistically self-similar sets and statistically self-affine sets, and some results on discrete fractals as well. Some open problems are also proposed.