第18卷第3期 数学研究与评论 Vol.18 No.3
1998年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1998

空间 $l_1(X_n)$ 中的弱紧性*

林 贵 华
(大连理工大学应用数学系，大连 116024)

摘 要 本文首先讨论空间 $l_1(X_n)$ 中的弱收敛性，然后给出了 $l_1(X_n)$ 中弱紧性的几种等价刻画，同时对 $l_p(X_n)\,(1<p<\infty)$ 中的弱紧性也得到了类似的结果.

关键词 $l_p(X_n)$，一致可和，弱紧性.
分类号 AMS(1991) 46B/CCL O177.2

1 引 言

设 $\{X_n\}$ 是一列 Banach 空间，$1\le p<\infty$. 记

$$l_p(X_n)=\{x=(x_n):\forall n,\ x_n\in X_n \text{ 且 } \|x\|=(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty\},$$

$$l_\infty(X_n)=\{x=(x_n):\forall n,\ x_n\in X_n \text{ 且 } \|x\|=\sup_n\|x_n\|<\infty\},$$

则 $l_1^*(X_n)\cong l_\infty(X_n^*)$，$l_p^*(X_n)\cong l_q(X_n^*)$（其中 $1<p<\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$）.

对于空间 $l_p(X_n)\,(1<p<\infty)$ 中的弱紧性，[1] 中已得到了很好的结果，而对 $l_1(X_n)$ 中没有讨论. 最近 [2,3] 对概率空间 (Ω,Σ,μ) 上的 Bochner 可积函数空间 $L_1(\mu,X)$ 中的弱紧性进行了研究. 本文将讨论 $l_1(X_n)$ 中的弱紧性，同时也给出 $l_p(X_n)\,(1<p<\infty)$ 中弱紧性的另一种刻画.

文中 B_X 表示空间 X 的单位球，P_m 表示由 $l_p(X_n)$ 到 X_m 的投影算子，$\mathrm{co}(A)$ 表示集合 A 的凸包，当 $x\in l_p(X_n)$ 时其坐标表示视为 (x_n).

2 $l_1(X_n)$ 中的弱收敛

定义 设集合 $A\subset l_p(X_n)\,(1\le p<\infty)$. 如果对任意 $\varepsilon>0$，均存在 $N=N(\varepsilon)$，使 $(\sum_{n>N}\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$ 对一切 $x\in A$ 成立，则称 A 是一致可和的.

利用 Minkowski 不等式立即得到

定理 1 若 $A\subset l_p(X_n)\,(1\le p<\infty)$ 一致可和，则 $\mathrm{co}(A)$ 也是一致可和的.

* 1995年11月29日收到.

定理 2 空间 $l_1(X_n)$ 中的有界序列 $\{x^k\}$ 弱收敛的充要条件是

(a) $\forall n, \{x_n^k\}$ 在 X_n 中弱收敛;

(b) $\{x^k\}$ 是一致可和的,即 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,使 $\forall k, \sum_{n>N} \|x_n^k\| < \varepsilon$.

证明 必要性. 设 $x^k \xrightarrow{w} x$,其中 $x = (x_n) \in l_1(X_n)$. 由 P_n 的连续性,(a) 显然成立. 若(b) 不成立,则有 $\lambda_0 > 0$ 及 $\{x^k\}$ 的子列 $\{y^k\}$ 使 $\sum_{n>k} \|y_n^k\| \geq \lambda_0 (\forall k)$. 因 $\{\|y^k\|\}$ 有界,故存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n>k} \|y_n^k\| = 6\varepsilon_0. \tag{1}$$

今取 k_0,使 $\sum_{n>k_0} \|x_n\| < \varepsilon_0$ 且当 $k > k_0$ 时

$$\sum_{n>k} \|y_n^k\| \leq 7\varepsilon_0. \tag{2}$$

第一步. 由(1),存在 $k_1 > k_2$ 及 $N_1 > k_1$ 使 $\sum_{k_1<n\leq N_1} \|y_n^{k_1}\| \geq 5\varepsilon_0$. 构造 $x_n^* \in B_{X_n^*} (1 \leq n \leq N_1)$ 如下:

当 $1 \leq n \leq k_1$ 时, $x_n^* = 0$;

当 $k_1 < n \leq N_1$ 时,由 Hahn-Banach 定理,可取到 $x_n^* \in B_{X_n^*}$ 使 $x_n^*(y_n^{k_1} - x_n) = \|y_n^{k_1} - x_n\|$.

第二步. 因 $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_1} x_n^*(y_n^k - x_n) = 0$,由(1),又存在 $N_2 > k_2 > N_1$,使 $\left|\sum_{n=1}^{N_1} x_n^*(y_n^{k_2} - x_n)\right| < \varepsilon_0$ 且 $\sum_{k_2<n\leq N_2} \|y_n^{k_2}\| \geq 5\varepsilon_0$. 构造 $x_n^* \in B_{X_n^*} (N_1 < n \leq N_2)$ 如下:

当 $N_1 < n \leq k_2$ 时, $x_n^* = 0$;

当 $k_2 < n \leq N_2$ 时,由 Hahn-Banach 定理,可取到 $x_n^* \in B_{X_n^*}$ 使 $x_n^*(y_n^{k_2} - x_k) = \|y_n^{k_2} - x_n\|$.

这样一步步做下去,就得到两上升的自然数列 $\{k_i\}$, $\{N_i\}$ 及 $x = (x_n^*) \in l_\infty(X_n^*)$ 满足(记 $N_0 = 0$): $\forall i, N_{i-1} < k_i < N_i$, $\sum_{k_i<n\leq N_i} \|y_n^{k_i}\| \geq 5\varepsilon_0$, $\left|\sum_{n=1}^{N_{i-1}} x_n^*(y_n^{k_i} - x_n)\right| < \varepsilon_0$,当 $N_{i-1} < n \leq k_i$ 时, $x_n^* = 0$;当 $k_i < n \leq N_i$ 时 $x_n^* \in B_{X_n^*}$ 且 $x_n^*(y_n^{k_i} - x_n) = \|y_n^{k_i} - x_n\|$.

由(2), $\forall i$, $\sum_{n>N_i} \|y_n^{k_i}\| = \sum_{n>k_i} \|y_n^{k_i}\| - \sum_{k_i<n\leq N_i} \|y_n^{k_i}\| \leq 7\varepsilon_0 - 5\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$. 注意到

$$\sum_{k_i<n\leq N_i} \|x_n\| + \sum_{n>N_i} \|x_n\| \leq \sum_{n>k_0} \|x_n\| < \varepsilon_0.$$

故 $\forall i$,

$$|x^*(y^{k_i} - x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y_n^{k_i} - x_n)\right|$$

$$\geq \left|\sum_{k_i<n\leq N_i} x_n^*(y_n^{k_i} - x_n)\right| - \left|\sum_{n=1}^{k_i} x_n^*(y_n^{k_i} - x_n)\right| - \left|\sum_{n>N_i} x_n^*(y_n^{k_i} - x_n)\right|$$

$$= \sum_{k_i < n \leq N_i} \| y_n^{k_i} - x_n \| - | \sum_{n=1}^{N_{i-1}} x_n^* (y_n^{k_i} - x_n) | - | \sum_{n > N_i} x_n^* (y_n^{k_i} - x_n) |$$
$$\geq \sum_{k_i < n \leq N_i} \| y_n^{k_i} \| - \sum_{k_i < n \leq N_i} \| x_n \| - \varepsilon_0 - \sum_{n > N_i} \| y_n^{k_i} \| - \sum_{n > N_i} \| x_n \|$$
$$\geq 5\varepsilon_0 - \varepsilon_0 - \varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = \varepsilon_0 > 0.$$

这与 $y^{k_i} \xrightarrow{w} x$ 矛盾. 故(b) 成立.

充分性. 设(a) ,(b) 成立. 由(a) , $\forall n$,存在 $x_n \in X_n$,使 $x_n^k \xrightarrow{w} x_n$. 令 $x = (x_n)$. 下证 $x \in l_1(X_n)$ 且 $x^k \xrightarrow{w} x$.

事实上,因$\{x^k\}$有界,故 $M = \sup_k \| x^k \| < \infty$. 由 Hahn-Banach 定理, $\forall n$,存在 $x_n^* \in B_{X_n^*}$ 使 $x_n^*(x_n) = \| x_n \|$. 于是 $\forall N$, $| \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n^k) | \leq \sum_{n=1}^{N} \| x_n^k \| \leq M$,注意到 $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n^k) = \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n) = \sum_{n=1}^{N} \| x_n \|$,故 $\sum_{n=1}^{N} \| x_n \| \leq M$,由 N 的任意性, $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \leq M$,即 $x \in l_1(X_n)$.

另一方面,任取 $x^* = (x_n^*) \in l_\infty(X_n^*)$ 及 $\forall \varepsilon > 0$. 由(b) ,存在 N ,使 $\sum_{n > N} \| x_n \| < \varepsilon$ 且 $\forall k$, $\sum_{n > N} \| x_n^k \| < \varepsilon$. 而 $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n^k - x_n) = 0$,故存在 k_0 ,使当 $k > k_0$ 时, $| \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n^k - x_n) | < \varepsilon$,从而当 $k > k_0$ 时,

$$| x^*(x^k - x) | = | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n^k - x_n) | \leq | \sum_{n=1}^{N} x_n^*(x_n^k - x_n) | + | \sum_{n > N} x_n^*(x_n^k - x_n) |$$
$$< \varepsilon + \| x^* \| (\sum_{n > N} \| x_n^k \| + \sum_{n > N} \| x_n \|) \leq (1 + 2 \| x^* \|) \varepsilon ,$$

由 ε 与 x^* 的任意性, $x^k \xrightarrow{w} x$. □

问题:对 $l_1(X_n)$ 中的弱 Cauchy 列是否有类似的结论?

3 $l_1(X_n)$ 中的弱紧性

引理 1[4] 在赋范空间 X 中,若 $x_n \xrightarrow{w} x$,则存在$\{y_n\}$,使 $\forall n$,

$$y_n \in \mathrm{co}(x_1, x_2, \cdots) \tag{3}$$

且 $y_n \to x$.

推论 (3) 可改为: $\forall n$, $y_n \in \mathrm{co}(x_n, x_{n+1}, \cdots)$.

证明 设 $x_n \xrightarrow{w} x$,则由引理 1 ,存在 $y_1 \in \mathrm{co}(x_1, x_2, \cdots)$ 使 $\| y_1 - x \| < 1$. 又因$\{x_n\}_{n\geq 2}$ 弱收敛于 x. 由引理 1 ,存在 $y_2 \in \mathrm{co}(x_2, x_3, \cdots)$ 使 $\| y_2 - x \| < \frac{1}{2}$. 这样继续下去,就得到一列$\{y_n\}$, $y_n \to x$ 且 $\forall n$, $y_n \in \mathrm{co}(x_n, x_{n+1}, \cdots)$. □

引理 2[2] 设 A 是 Banach 空间 X 中的有界集. 则 A 相对弱紧的充要条件为:对 A 中任一

序列$\{x_n\}$,均存在序列$\{y_n\}$,使$\{y_n\}$弱收敛且$\forall n, y_n \in \mathrm{co}(x_n, x_{n+1}, \cdots)$.

定理 3 设 K 为 $l_1(X_n)$ 中的有界集,则下列命题等价:

(a) K 是相对弱紧的;

(b) K 是一致可和的,且 $\forall n, P_n(K)$ 是相对弱紧的;

(c) K 是一致可和的,且对任意$\{x^k\} \subset K$,存在$\{y^k\}$使 $\forall k, y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots)$ 且 $\forall n, \{y_n^k\}$ 强收敛;

(d) K 是一致可和的,且对任意$\{x^k\} \subset K$,存在$\{y^k\}$使 $\forall k, y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots)$ 且 $\forall n, \{y_n^k\}$ 弱收敛.

证明 (a)$\Rightarrow$(b) 设 K 是相对弱紧的,由 P_n 的连续性,$P_n(K)$ 在 X_n 中是相对弱紧的.下证 K 是一致可和的.

否则,存在 $\varepsilon_0 > 0$,使 $\forall k$,存在 $x^k \in K$ 使

$$\sum_{n>k} \| x_n^k \| \geq \varepsilon_0 \tag{4}$$

由于 K 是相对弱紧的,故$\{x^k\}$必有弱收敛的子列.设为$\{x^{k_i}\}$,由定理 2,存在 N,使 $\forall i$, $\sum_{n>N} \| x_n^{k_i} \| < \varepsilon_0$,特别当 $k_i \geq N$ 时 $\sum_{n>k_i} \| x_n^{k_i} \| \leq \sum_{n>N} \| x_n^{k_i} \| < \varepsilon_0$,与(4)矛盾,故 K 是一致可和的.

(b)$\Rightarrow$(a) 设 K 满足(b),要证 K 是相对弱紧的,由 Eberlein-Smulian 定理[4],只须证 K 是相对弱列紧的.

任取$\{x^k\} \subset K$,由于 $\forall n, P_n(K)$ 均为相对弱紧的,利用对角线法可找到$\{x^k\}$的子列$\{x^{k_i}\}$及 $x = (x_n)$ 使 $\forall n$,

$$x_n^{k_i} \xrightarrow{w} x_n. \tag{5}$$

由定理 2 充分性的证明可知 $x \in l_1(X_n)$.

另一方面,由于 K 是一致可和的,故$\{x^{k_i}\}$也是一致可和的,从而由定理 2 及(5)知 $x^{k_i} \xrightarrow{w} x$.即 K 是相对弱列紧的.

(a)$\Rightarrow$(c) 只须证(c)的后半部分.任取$\{x^k\} \subset K$,由于 K 是相对弱紧的,故存在弱收敛的子列,设为$\{x^{k_i}\}$且 $x^{k_i} \xrightarrow{w} x$.由引理 1 的推论,存在$\{y^i\}$使 $y^i \to x$ 且 $\forall i, y^i \in \mathrm{co}(x^{k_i}, x^{k_{i+1}}, \cdots) \subset \mathrm{co}(x^i, x^{i+1}, \cdots)$.由 P_n 的连续性知$\{y_n^i\}$在 X_n 中强收敛.

(c)$\Rightarrow$(d) 显然成立.

(d)$\Rightarrow$(a) 设(d)成立,则任取$\{x^k\} \subset K$,存在$\{y^k\}$使 $\forall k$,

$$y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots) \text{ 且 } \forall n, \{y_n^k\} \text{ 弱收敛}. \tag{6}$$

由于 K 是一致可和的,由定理 1,$\mathrm{co}(K)$ 也是一致可和的,故$\{y^k\}$也是一致可和的,由定理 2 及(6),$\{y^k\}$弱收敛,从而由引理 2 知 K 是相对弱紧的. □

4 $l_p(X_n)(1 < p < \infty)$ 中的弱紧性

类似地可以考虑 $l_p(X_n)(1 < p < \infty)$ 中的弱紧性.

引理 3[1] $l_p(X_n)(1<p<\infty)$ 中的有界序列 $\{x^k\}$ 弱收敛的充要条件是 $\forall n, \{x_n^k\}$ 弱收敛.

定理 4 设 K 为 $l_p(X_n)(1<p<\infty)$ 中的有界集,则下列命题等价:

(a) K 是相对弱紧的;

(b) $\forall n, P_n(K)$ 是相对弱紧的;

(c) $\forall \{x^k\} \subset K$,存在 $\{y^k\}$ 使 $\forall k, y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots)$ 且 $\forall n, \{y_n^k\}$ 强收敛;

(d) $\forall \{x^k\} \subset K$,存在 $\{y^k\}$ 使 $\forall k, y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots)$ 且 $\forall n, \{y_n^k\}$ 弱收敛.

证明 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 参照[1]即得.

(a) $\Rightarrow$ (c) 的证明与定理 3 的相应部分相同.

(c) $\Rightarrow$ (d) 显然.

(d) $\Rightarrow$ (a) 由引理 2 与引理 3 即得. □

参 考 文 献

[1] I. E. Leonard, *Banach sequences spaces*, J. Math. Anal. Appl., 54(1976), 245 - 265.

[2] A. Ülger, *Weak compactness in $L^1(\mu, X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., 113(1991), 143 - 149.

[3] J. Diestel, W. M. Ruess and W. Schachermayer, *Weak compactness in $L^1(\mu, X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., 118(1993), 447 - 453.

[4] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Berlin, Springer, 1983.

[5] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measure*, Math. Surveys, No. 15, Amer. Math. Soc., 1977.

On Weak Compactness in $l_1(X_n)$

Lin Guihua

(Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, 116024)

Abstract

In this paper, we first discuss weak convergence in $l_1(X_n)$, and then give several characterizations of weak compactness in $l_1(X_n)$. Moreover, we obtain some similar results in $l_p(X_n)(1<p<\infty)$.

Keywords $l_p(X_n)$, uniformly summable, weak compactness.