第18卷第3期 数学研究与评论 Vol.18 No.3
1998年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1998

Sasakian 空间型的 C-全实伪脐子流形*

刘 西 民

(大连理工大学应用数学系,116024)

摘 要 本文讨论了 Sasakian 空间型的 C-全实伪脐子流形,给出关于第二基本形式长度的一个 Pinching 定理.

关键词 Sasakian 空间型, C-全实子流形,伪脐子流形.

分类号 AMS(1991) 53C42,53C15,53C40/CCL O186

1 引 言

设 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 是 $2n+1$ 维具有常 ϕ-截面曲率 k 的 Sasakian 空间型, M 是 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的 n 维紧致 C-全实子流形. 设 h 为浸入的第二基本形式, S 为 h 的长度的平方, H 为平均曲率向量, g 为 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 上的度量张量,如果在 M 上存在函数 λ 使得对 M 上的任意切向量 X, Y 有

$$g(h(X,Y),H)=\lambda g(X,Y), \tag{1.1}$$

则称 M 为 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的伪脐子流形[5],显然 $\lambda\geq 0$. 如果 M 的第二基本形式 h 恒为 0,则 M 称为全测地子流形. 如果 $H\equiv 0$,则 M 称为极小子流形,显然每一个极小子流形都是伪脐子流形.

S. Yamaguchi 等在文[1]中讨论了 Sasakian 空间型的 C-全实极小子流形,证明了

定理 A 设 M 是 Sasakian 空间型 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的紧致 n 维 C-全实极小子流形,如果

$$S<\frac{1}{4(2n-1)}n(n+1)(k+3),$$

则 M 是全测地子流形.

本文研究了 Sasakian 空间型的 C-全实伪脐子流形,得到了如下主要结果

定理 B 设 M 是 Sasakian 空间型 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的紧致 n 维 C-全实伪脐子流形,如果

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)S^2<\frac{1}{4}(n+1)(k+3)S+n^2\lambda^{\frac{1}{2}}\triangle\lambda^{\frac{1}{2}}+n\lambda\left(S-\frac{k+3}{4}n\right),$$

则 M 是全测地子流形.

显然当 $\lambda=0$ 时,定理B即为定理A.

2 C-全实子流形

* 1996年1月3日收到.

设 $\widetilde{M}$ 为 Sasakian 流形,其结构张量为 (ϕ,ξ,η,g) ,则结构张量满足下列方程[3]

$$\phi^2=-I+\eta\otimes\xi,\quad \phi\xi=0,\quad \eta(\phi X)=0,\quad \eta(\xi)=1,$$

$$g(X,\xi)=\eta(X),\quad \overline{\nabla}_X\xi=\phi X,$$

$$(\overline{\nabla}_X\phi)Y=\eta(Y)X-g(X,Y)\xi,$$

这里 X,Y 是 $\widetilde{M}$ 上的任意向量场, $\overline{\nabla}$ 为 $\widetilde{M}$ 上关于度量 g 的 Levi-Civita 连络.

一个 Sasakian 流形是定向的奇数维流形. 一个 $2n+1$ 维 Sasakian 流形称为 Sasakian 空间型如果它有常 ϕ-截面曲率 k ,即其曲率张量 $\overline{R}$ 有下列形式

$$\begin{aligned}4\overline{R}(X,Y)Z=&(k+3)(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)+(k-1)(\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X+\\&g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi+g(\phi Y,Z)\phi X+\\&g(\phi Z,X)\phi Y-2g(\phi X,Y)\phi Z),\end{aligned}\tag{2.1}$$

记具有常 ϕ-截面曲率 k 的 $2n+1$ 维 Sasakian 空间型为 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$.

下面简单地回顾一下 Sasakian 流形的 C-全实子流形的定义. 设 $\widetilde{M}$ 是 $2n+1$ 维切触流形,其切触形式为 η. 则 Pfaffian 方程 $\eta=0$ 在 $\widetilde{M}$ 上决定了一个 $2n$ 维分布称为切触分布[3].

$\widetilde{M}$ 的一个子流形 M 称为切触分布的一个积分子流形当且仅当 M 的每一个切向量都属于切触分布. 称 Sasakian 流形的切触分布的积分子流形为 C-全实子流形. 对 $\widetilde{M}$ 的 C-全实子流形 M ,有 $\dim M\le n$[3]. 下面的定理在文献[2]中证明.

定理 2.1[2] 设 $\widetilde{M}^{2n+1}$ 是 Sasakian 流形,其结构张量为 (ϕ,ξ,η,g) , M 是 $\widetilde{M}^{2n+1}$ 的 $m(m\le n)$ 维 C-全实子流形,则有

(i) M 的第二基本形式在 ξ 方向恒为 0.

(ii) 如果 $X\in TM$, 则 $\phi X\in T^{\perp}M$.

(iii) 对 $X,Y,Z\in TM$, $g(\phi X,h(Y,Z))=g(\phi Y,h(X,Z))$.

3 C-全实伪脐子流形的局部公式

设 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 为具有常 ϕ-截面曲率 k 的 Sasakian 空间型, M 为 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的 n 维全实伪脐子流形. 选取 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的局部正交标架场为

$$e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}=\phi e_1,\cdots,e_{2n}=\phi e_n,e_{2n+1}=\xi$$

限制在 M 上, $e_1,\cdots,e_n$ 切于 M .

使用下面的指标约定, 除非作特别指出:

$$A,B,C,D,\cdots=1,\cdots,2n+1;\quad i,j,k,l,\cdots=1,\cdots,n;\quad \alpha,\beta,\gamma,\cdots=n+1,\cdots,2n+1.$$

关于 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 如上选取的标架场,令 $\omega^1,\cdots,\omega^{2n},\omega^{2n+1}=\eta$ 为对偶标架场,则 $\widetilde{M}^{2n+1}(k)$ 的结构方程为

$$d\omega^A=-\sum\omega^A_B\wedge\omega^B,\ \omega^A_B+\omega^B_A=0,\tag{3.1}$$

$$d\omega^A_B=-\sum\omega^A_C\wedge\omega^C_B+\frac{1}{2}\sum\overline{R}_{ABCD}\omega^C\wedge\omega^D\tag{3.2}$$

限制在 M 上, $\omega^\alpha=0$. 因为 $0=d\omega^\alpha=-\sum\omega^\alpha_i\wedge\omega^i$,由 Cartan 引理可记

$$\omega^\alpha_i=\sum h^\alpha_{ij}\omega^j,\ h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}.\tag{3.3}$$

由这些公式可得

$$d\omega^i = -\sum \omega^i_j \wedge \omega^j,\quad \omega^i_j + \omega^j_i = 0, \tag{3.4}$$

$$d\omega^i_j = -\sum \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{3.5}$$

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + \sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{3.6}$$

$$d\omega^\alpha_\beta = -\sum \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta + \frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta kl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{3.7}$$

$$R_{\alpha\beta kl} = \bar{R}_{\alpha\beta kl} + \sum (h^\alpha_{ik}h^\beta_{il} - h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}). \tag{3.8}$$

M 的第二基本形式定义为 $h = \sum h^\alpha_{ij}\omega^i\omega^j e_\alpha$,并记 h 的长度的平方为 $S = \sum (h^\alpha_{ij})^2$.

称 $H = \frac{1}{n}\sum \mathrm{tr}\, H_\alpha e_\alpha$, $\mu = \| H \| = \frac{1}{n}\sqrt{\sum (\mathrm{tr}\, H_\alpha)^2}$ 分别为 M 的平均曲率向量和平均曲率,这里 tr 表示矩阵 $H_\alpha = (h^\alpha_{ij})$ 的迹.

现在令 $e_{n+1} = \phi e_1$ 平行于 H,则

$$\mathrm{tr}\, H_{n+1} = n\mu,\ \mathrm{tr}\, H_\alpha = 0 \quad \alpha \neq n+1. \tag{3.9}$$

如下定义 h^α_{ij} 的一阶和二阶协变导数 h^α_{ijk} 和 h^α_{ijkl} (参见[4])

$$\sum h^\alpha_{ijk}\omega^k = dh^\alpha_{ij} - \sum h^\alpha_{kj}\omega^k_i - \sum h^\alpha_{ik}\omega^k_j + \sum h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta, \tag{3.10}$$

$$\sum h^\alpha_{ijkl}\omega^l = dh^\alpha_{ijk} - \sum h^\alpha_{ljk}\omega^l_i - \sum h^\alpha_{ilk}\omega^l_j - \sum h^\alpha_{ijl}\omega^l_k + \sum h^\beta_{ijk}\omega^\alpha_\beta. \tag{3.11}$$

第二基本形式 h^α_{ij} 的 Laplacian 定义为 $\triangle h^\alpha_{ij} = \sum h^\alpha_{ijkk}$,通过简单计算有(参见[5])

$$\begin{aligned}\sum h^\alpha_{ij}\triangle h^\alpha_{ij} = {} & \sum (h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kkij} - \bar{R}_{\alpha ij\beta}h^\alpha_{ij}h^\beta_{kk} + 4\bar{R}_{\alpha\beta ki}h^\alpha_{ij}h^\beta_{jk} - \\ & \bar{R}_{\alpha k\beta k}h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij} + 2\bar{R}_{mkik}h^\alpha_{mj}h^\beta_{ij} + 2\bar{R}_{mijk}h^\alpha_{mk}h^\alpha_{ij}) - \\ & \sum ((h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik})(h^\alpha_{il}h^\beta_{jl} - h^\alpha_{jl}h^\beta_{il}) + h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kl}h^\beta_{ij}h^\beta_{kl} - h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ki}h^\beta_{kj}h^\beta_{ll}).\end{aligned} \tag{3.12}$$

4 定理 B 的证明

由(3.12)和(3.1)及定理 2.1 得

$$\begin{aligned}\sum h^\alpha_{ij}\triangle h^\alpha_{ij} = {} & \frac{k+3}{4}(n+1)S + \sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kkij} - \sum \frac{k+3}{4}(\mathrm{tr}\, H_\alpha)^2 + \\ & \sum \mathrm{tr}\, H_\beta(H_\alpha H_\beta H_\alpha) + \sum \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha)^2 - \\ & \sum (\mathrm{tr}\, H_\alpha H_\beta)^2.\end{aligned} \tag{4.1}$$

由(1.1)和(3.9),有 $\sum \mathrm{tr}\, H_\alpha h^\alpha_{ij} = m\lambda\delta_{ij}$, $m\mu h^{n+1}_{ij} = m\lambda\delta_{ij}$, 即 $\mu = \lambda^{\frac{1}{2}}$,故

$$h^{n+1}_{ij} = \lambda^{\frac{1}{2}}\delta_{ij}, \tag{4.2}$$

$$\int_M \sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kkij}\,\mathrm{dV} = \int_M n^2\lambda^{\frac{1}{2}}\triangle\lambda^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dV}. \tag{4.3}$$

由(3.9)和(4.2)有

$$\sum (\mathrm{tr}\, H_\alpha)^2 = n^2\lambda, \tag{4.4}$$

$$\sum \mathrm{tr}\, H_\beta (H_\alpha H_\beta H_\alpha) = n\lambda S. \qquad (4.5)$$

在(4.1)式中用(4.3),(4.4)和(4.5)替换得

$$\sum h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha = \frac{k+3}{4}(n+1)S + \sum h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha - \frac{k+3}{4}n^2\lambda + n\lambda S + \sum \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha)^2 - \sum(\mathrm{tr}\, H_\alpha H_\beta)^2 \qquad (4.6)$$

还需要下面的引理.

引理 1[4] 设 A 和 B 是两个 $n\times n$ 对称矩阵,则 $-\mathrm{tr}(AB-BA)^2 \le 2(\mathrm{tr}A^2)(\mathrm{tr}B^2)$,对非零矩阵 A 和 B 等式成立当且仅当 A 和 B 可同时被一正交矩阵变换成矩阵 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 的数量倍数,这里

的第 式定 $\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right]$ 形; $\bar{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right]$.

而且,如果 A_1, A_2 和 A_3 是 $n\times n$ 对称矩阵且 $-\mathrm{tr}(A_iA_j - A_jA_i)^2 = 2\mathrm{tr}A_i^2\mathrm{tr}A_j^2$, $1\le i,j\le 3$,则至少有一个矩阵 A_i 必为 0.

由[4]知 $\sum(\mathrm{tr}\, H_\alpha H_\beta)^2 = \sum(\mathrm{tr}\, H_\alpha^2)^2$. 对(4.6)运用引理 1 得

$$\begin{aligned}
\sum h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha &\ge \frac{k+3}{4}(n+1)S + \sum h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha - \frac{k+3}{4}n^2\lambda + n\lambda S - \\
&\quad 2\sum_{\alpha\ne\beta}\mathrm{tr}\, H_\alpha^2 H_\beta^2 - \sum(\mathrm{tr}\, H_\alpha^2)^2 \\
&= \frac{k+3}{4}(n+1)S + \sum h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha - \frac{k+3}{4}n^2\lambda + n\lambda S - \\
&\quad 2\sum_{\alpha<\beta}\mathrm{tr}\, H_\alpha^2 H_\beta^2 - (\sum \mathrm{tr}\, H_\alpha^2)^2 \\
&= \frac{k+3}{4}(n+1)S + \sum h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha - \frac{k+3}{4}n^2\lambda + n\lambda S - \\
&\quad (2-\frac{1}{n})S^2 + n(n+1)(\sigma_1^2-\sigma_2), \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

这里 $(n+1)\sigma_1 = \sum \mathrm{tr}\, H_\alpha^2 = S$, $n(n+1)\sigma_2 = 2\sum_{\alpha<\beta}\mathrm{tr}\, H_\alpha^2 H_\beta^2$. 易见

$$(n+1)^2 n(\sigma_1^2 - \sigma_2) = \sum_{\alpha<\beta}(\mathrm{tr}\, H_\alpha^2 - \mathrm{tr}_\beta^2) \ge 0.$$

因此有

$$\sum h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha \ge \frac{k+3}{4}(n+1)S + \sum h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha - \frac{k+3}{4}n^2\lambda + n\lambda S - (2-\frac{1}{n})S^2. \qquad (4.8)$$

另一方面有

$$\frac{1}{2}\triangle(\sum(h_{ij}^\alpha)^2) = \sum(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha. \qquad (4.9)$$

由于 M 是紧致的,在 M 上积分(4.9)式并对左边运用 Stokes 定理得

$$\int_M(\sum h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha)\,\mathrm{dV} = -\int_M \sum(h_{ijk}^\alpha)^2\mathrm{dV} \le 0. \qquad (4.10)$$

由(4.8)和(4.10)知

$$\int_M((2-\frac{1}{n})S^2 - \frac{k+3}{4}(n+1)S - n^2\lambda^{\frac12}\triangle\lambda^{\frac12} - n\lambda S + \frac{k+3}{4}n^2\lambda,\ \mathrm{dV} \ge 0. \qquad (4.11)$$

这样就完成了定理 B 的证明.

参 考 文 献

[1] S. Yamaguchi, M. Kon and T. Ikawa, *C-totally real submanifolds*, J. Diff. Geom., 11(1976), 59 - 64.

[2] S. Yamaguchi and T. Ikawa, *On compact minimal C-totally real submanifold*, Tensor, 29(1975), 30 - 34.

[3] D. E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture notes in Math., Vol. 509, Berlin, Springer 1976.

[4] S. S. Chern, M. do Carmo and S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, Springer, New York, 1970, 60 - 75.

[5] B. Y. Chen, *Some results Chern-do Carmo-Kobayashi type and the lengh of second fundamental form*, Indiana Univ. Math. J., 20(1971), 1175 - 1185.

[6] B. Y. Chen, *Corrections to some results Chern-do Carmo-Kobayashi type and the length of second fundamental form*, Indiana Univ. Math. J., 22(1972), 399.

C-totally Real Pseudo-umbilical Submanifolds of a Sasakian Space Form

Liu Ximin

(Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Tech., Dalian 116024)

Abstract

In this paper we discuss the *C*-totally real pseudo-umbilical submanifold of a Sasakian space form, a pinching theorem for the length of the second fundamental form is obtained.

Keywords Sasakian space form, *C*-totally real submanifold, pseudo-umbilical submanifold.