第18卷第3期　　数学研究与评论　　Vol.18 No.3
1998年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug.1998

球面上的点在连续映射下的性质*

刘宇红　　　　付　军
(吉林农业大学,长春130118)　(四平师范学院,136000)

摘　要　本文应用Smith周期变换理论,根据球面在周期变换下的指数,对球面上的点在连续映射下的性质作了进一步探讨,从而丰富了Borsuk-Ulam定理.

关键词　Smith特殊指数,周期变换,协变映射.

分类号　AMS(1991) 55M30/CCL O189.2

1　引　言

1933年Borsuk-Ulam证明了从球面 S^m 到欧氏空间 R^m 的连续映射 f,至少有一点 $x\in S^m$,使得 $f(x)=f(-x)$.从此,人们在这方面做了大量的工作,其结果都是推广了Borsuk-Ulam定理.为进一步丰富原定理的内容,本文应用Smith周期变换理论,对球面上的点在球面到特殊流形的连续映射下的性质做了进一步探讨.

引理1[4]　若 t 是球面 S^m 上周期为 n 的无定点周期变换,素数 P 整除 n,则

$$I(S^m;Z_p)=m+1.$$

引理2[4]　设 X,Y 是弧连通的Hausdorff空间,T 是 X,Y 上无定点周期变换群,$f:X\to Y$ 是关于 T 的协变映射,则 $I(X,T)\leq I(Y,T)$.

2　主要结果

定理1　设 $f:S^m\to S^n\times S^n\times\cdots\times S^n$($\delta$个 S^n 的乘积)是一连续映射,$f=(f_1,f_2,\cdots,f_\delta)$,$m>n$,$t$ 是 S^m 上周期为2的无定点周期变换,则至少有一点 $x\in S^m$,使得等式

$$\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)=\sum_{i=1}^{\delta}f_i(tx)$$

成立.

证明　假设不存在点 $x\in S^m$,使得等式 $\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)=\sum_{i=1}^{\delta}f_i(tx)$ 成立,令

$$\tilde{f}:S^m\to S^n,$$

$$\tilde{f}(x)=\frac{\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)-\sum_{i=1}^{\delta}f_i(tx)}{\left|\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)-\sum_{i=1}^{\delta}f_i(tx)\right|}.$$

* 1995年4月21日收到.

由于 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_\delta)$ 是连续映射,所以 $\tilde{f}$ 亦为连续映射,令

$$t:S^n\to S^n,$$
$$t(y)=-y,$$

则 t 是 S^n 上周期为 2 的无定点周期变换,并且

$$\tilde{f}(tx)=\frac{\sum_{i=1}^{\delta}f_i(tx)-\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)}{\left|\sum_{i=1}^{\delta}f_i(tx)-\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)\right|}=t\tilde{f}(x),$$

即 $\tilde{f}:S^m\to S^n$ 关于 t 协变,由引理 1 和引理 2 有

$$m+1=I(S^m;Z_2)\le I(S^n;Z_2)=n+1,$$

即 $m\le n$,这与假设 $m>n$ 矛盾,故定理得证.

推论 1 设 $f:S^m\to S^n\times S^n\times\cdots\times S^n$($\delta$ 个 S^n 之积) 是一连续映射,$f=(f_1,f_2,\cdots,f_\delta)$,$m>n$,$t$ 是 S^m 上的对径映射,则至少有一点 $x\in S^m$,使得等式 $\sum_{i=1}^{\delta}f_i(x)=\sum_{i=1}^{\delta}f_i(-x)$ 成立.

定理 2 设 $f:S^m\to S^n\times S^n\times\cdots\times S^n\times R^{n+1}\times R^{n+1}\times\cdots\times R^{n+1}$($\delta_1$ 个 S^n 和 δ_2 个 R^{n+1} 之积) 是一连续映射,t 是 S^m 上周期为 2 的无定点周期变换,$m>n$,$f=(f_1,f_2,\cdots,f_{\delta_1},f_{\delta_1+1},\cdots,f_{\delta_1+\delta_2})$,则至少存在一点 $x\in S^m$,使得等式

$$\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(x)=\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(tx)$$

成立.

证明 假设不存在点 $x\in S^m$,使得等式

$$\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(x)=\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(tx)$$

成立. 令

$$\tilde{f}:S^m\to S^n,$$

$$\tilde{f}(x)=\frac{\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(x)-\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(tx)}{\left|\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(x)-\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(tx)\right|}.$$

由于 f 连续,所以 $\tilde{f}$ 亦连续,令

$$t:S^n\to S^n,$$
$$t(y)=-y,$$

则 t 是 S^n 上周期为 2 的无定点周期变换,并且

$$\tilde{f}(tx)=\frac{\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(tx)-\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(x)}{\left|\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(tx)-\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2}f_i(x)\right|}=t\tilde{f}(x),$$

即 $\tilde{f}:S^m\to S^n$ 关于 t 协定,由引理 1 和引理 2 有

$$m+1 = I(S^m; Z_2) \leq I(S^n; Z_2) = n+1,$$

即 $m \leq n$,这与假设 $m > n$ 相矛盾. 故定理得证.

推论 2 设 $f: S^m \to S^n \times S^n \times \cdots \times S^n \times R^{n+1} \times \cdots \times R^{n+1}$ (δ_1 个 S^n 和 δ_2 个 R^{n+1} 之积)是一连续映射, $m > n$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_{\delta_1}, f_{\delta_1+1}, \cdots, f_{\delta_1+\delta_2})$, t 是 S^m 上的对径映射,则至少有一点 $x \in S^m$,满足

$$\sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2} f_i(x) = \sum_{i=1}^{\delta_1+\delta_2} f_i(-x).$$

3 讨 论

由于球面 S^n 可以嵌入到 R^{n+1} 中作为子流形,设 $i: S^n \to R^{n+1}$ 为恒同映射,由推论 1:当 $\delta = 1$, $n = m-1$ 时, $f: S^m \to S^n$ 是连续映射,则至少存在一点 $x \in S^m$,使得 $f(x) = f(-x)$.

令

$$\tilde{f} = i \circ f: S^m \to R^{n+1} = R^m,$$

则至少有一点 $x \in S^m$,使得 $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x)$. 由推论 2:当 $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$, $n = m-1$ 时, f 是从 S^m 到 R^m 的连续映射,则至少存在点 $x \in S^m$,使得 $f(x) = f(-x)$. 从而定理 1 和定理 2 推广了 Borsuk-Ulam 定理,并使原定理内容更加丰富.

参 考 文 献

[1] D. G. Bourgin, Moden algebraic topology, 1963.

[2] M. A. Armstrong 著, 孙以丰译,《基础拓扑学》, 北京大学出版社, 1983.

[3] 陈省身、陈维桓, 微分几何讲义, 北京大学出版社, 1981.

[4] 何伯和, 从球面到欧氏空间的映射, 数学年刊, 2:2(1981).

The Property of the Point on Sphere Under Continuous Mapping

Liu Yuhong

(Jilin Agricultural University, Changchun 130118)

Fu Jun

(Siping Teacher's College, 136000)

Abstract

The property of the point on sphere under continuous mapping is discussed with Smith cycle transformation theory and the index under cycle transformation on sphere. Then the Borsuk-Ulam theorem is extended widely.

Keywords Smith specical index, cycle transformation, covariant map.