第18卷第3期 数学研究与评论 Vol.18 No.3
1998年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.1998

抽象空间混合型微分-积分方程两点边值问题的解*

张 克 梅
(曲阜师范大学数学与计算机科学系, 273165)

摘 要 本文利用混合单调算子理论及 Mönch 的一个结果,得到了一类微分方程两点边值问题的解.

关键词 正规锥,拟解对,非紧性测度.

分类号 AMS(1991) 34A37/CCL O175.8

1 前 言

本文在 Banach 空间内研究了下列混合型微分方程两点边值问题:

$$\begin{cases} -u''=f(t,u,u,Tu,Su), \\ u(0)=u(1)=\theta. \end{cases}$$

若上式中的四个不等式均为等号,则称 τ_0, w_0 为问题(1)的拟解对. 设 τ_0, w_0 为(1)的拟解对.

* 1995年5月31日收到. 1997年9月收到修改稿. 山东省自然科学基金资助项目.

若对(1)的任意拟解对 τ, w,均有 $\tau_0(t) \le \tau(t), w(t) \le w_0(t), \forall t \in I$,则称 τ_0, w_0 为(1)的最小,最大拟解对. 若 $x \in C^2[I, E]$满足(1),则称 x 为(1)的一个解.

引理 1[2] 设 $H \subset C[I, E]$ 是有界的,等度连续的,则 $\alpha(H) = \max_{t \in I} \alpha(H(t))$,$\alpha(H) = \alpha(H(I))$,其中 α 为 Kuratowski 非紧性测度, $H(t) = \{x(t) \mid x \in H\} \subset E$.

引理 2[3] 设 E 是一个可分的 Banach 空间,$\beta(\cdot)$ 是 E 上的 Hausdorff 非紧性测度,$J = [a, b]$,设$\{x_n\}: J \to E$ 为一连续抽象的函数列,若存在函数 $\mu \in L^1[a, b]$,使得 $\| x_n(t) \| \le \mu(t), t \in J, n \in N$,则 $\phi(t) = \beta(\{x_n(t) \mid n \in N\})$ 是可积的,且 $\beta(\{\int x_n(t) \mid n \in N\}) \le \int \phi(t)\,dt$.

引理 3[4] 设 E 为 Banach 空间, $K \subset E$ 为闭凸集, $F: K \to K$ 连续. 若对某个 $x \in K$, K 中任一可数集 C, $\overline{C} = \overline{\mathrm{co}}(\{x\} \cup F(C))$,都有 C 相对紧,则 F 在 K 中存在不动点.

3 主要结果

定理 1 设 E 为实 Banach 空间, P 为 E 中正规锥,若下列条件(A_1) - (A_3)满足:

(A_1) 设 $\tau_0, \omega_0 \in C^2[I, E]$, $\tau_0 \le \omega_0$ 为(1)的拟下、上解对;

(A_2) 存在常数 $M > 0$,使对序区间$[\tau_0, \omega_0]$中的任意 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_2 \le x_1, y_2 \le y_1$,有

$$f(t, x_1, y_2, Tx_1, Sy_2) - f(t, x_2, y_1, Tx_2, Sy_1) \ge - M(x_1 - x_2); \tag{4}$$

(A_3) 存在非负常数 $L_i (i = 1, 2, 3, 4)$,使对任意单调有界列 $B_1 = \{u_n\}, B_2 = \{\overline{u}_n\}$,有

$$\alpha(f(t, B_1(t), B_2(t), (TB_1)(t), (SB_2)(t))) \le L_1 \alpha(B_1(t)) + L_2 \alpha(B_2(t)) + L_3 \alpha((TB_1)(t)) + L_4 \alpha((SB_2)(t)), \tag{5}$$

其中

$$\frac{1}{\sqrt{M}} e^{\sqrt{M}} (e^{2\sqrt{M}} - 1)(L_1 + M + L_2 + L_3 k_0 + 2 L_4 h_0) < 1. \tag{6}$$

则边值问题(1)有解 $\overline{u}$,且 $\tau^* \le \overline{u} \le \omega^*$,其中 τ^*, ω^*为问题(1)的最小、最大拟解对.

证明 对任给 $\eta_1, \eta_2 \in [\tau_0, \omega_0]$,考虑下列二阶线性微分方程两点边值问题:

$$f \quad \begin{cases} - u''(t) = f(t, \eta_1(t), \eta_2(t), (T\eta_1)(t), (S\eta_2)(t)) - M(u(t) - \eta_1(t)), \\ u(0) = u(1) = \theta, \end{cases}$$

,其中 $\mathrm{sh}\, t$

$= \frac{e^t - e^{-t}}{2}$,易证

$$0 \le G(t, s) \le \frac{1}{2\sqrt{M}} e^{\sqrt{M}} (e^{2\sqrt{M}} - 1), \quad \forall (t, s) \in I \times I. \tag{9}$$

利用常规证法知(7)的解唯一,于是可以作算子 $A:[\tau_0,\omega_0]\times[\tau_0,\omega_0]\to E$,使得 $A(\eta_1,\eta_2)=u$, $u=u(t)$为(7)的唯一解.显然 η_1,η_2 为(1)的拟解对 $\Leftrightarrow\eta_1=A(\eta_1,\eta_2)$, $A(\eta_2,\eta_1)=\eta_2$.利用算子 A 的定义及条件(A_1),(A_2)易证:(i) $\tau_0\le A(\tau_0,\omega_0)$, $A(\omega_0,\tau_0)\le\omega_0$; (ii) A 为混合单调算子.令

$$\tau_n=A(\tau_{n-1},\omega_{n-1}),\ \omega_n=A(\omega_{n-1},\tau_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,\tag{10}$$

则由(i),(ii)及(10)可得下列序单调列:

$$\tau_0\le\tau_1\le\cdots\le\tau_n\le\cdots\le\omega_n\le\cdots\le\omega_1\le\omega_0.\tag{11}$$

对任意 $t\in I$,由条件(A_2)及 A 的混合单调性,有

$$\begin{aligned}&f(t,\tau_{n-1}(t),\omega_{n-1}(t),(T\tau_{n-1})(t),(S\omega_{n-1})(t))+M\tau_{n-1}(t)\\&\quad\le f(t,\tau_0(t),\omega_0(t),(T\tau_0)(t),(S\omega_0)(t))+M\tau_0(t),\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&f(t,\tau_{n-1}(t),\omega_{n-1}(t),(T\tau_{n-1})(t),(S\omega_{n-1})(t))+M\omega_{n-1}(t)\\&\quad\le f(t,\omega_0(t),\tau_0(t),(T\omega_0)(t),(S\tau_0)(t))+M\omega_0(t).\end{aligned}\tag{13}$$

故由(12)、(13)且据 P_c 的正规性知 $\{f(t,\tau_{n-1}(t),\omega_{n-1}(t),(T\tau_{n-1})(t),(S\omega_{n-1})(t))+M\tau_{n-1}(t)\mid n=1,2,\cdots\}$ 关于 $t\in I$ 一致有界,从而可证 $\{\tau_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 等度连续、有界.下证对任意 $t\in I$, $\{\tau_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}$ 为 E 中相对紧集.令 $B_1(t)=\{\tau_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}$, $B_0(t)=\{\tau_n(t)\mid n=0,1,2,\cdots\}$, $D_1(t)=\{\omega_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}$, $D_0(t)=\{\omega_n(t)\mid n=0,1,2,\cdots\}$.由非紧性测度的性质知 $\alpha(B_1(t))=\alpha(B_0(t))$, $\alpha(D_1(t))=\alpha(D_0(t))$.记 $m(t)=\alpha(B_1(t))=\alpha(B_0(t))$, $n(t)=\alpha(D_1(t))=\alpha(D_0(t))$.对每个 n, $\{u_n(t)\mid t\in I\}$ 是 E 中可分集,从而 $\{u_n(t)\mid n\in N,t\in I\}$ 是 E 中可分集,故可设 E 为可分的Banach空间.假若 $\{\tau_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}$ 非相对紧,则利用(10),算子 A 的定义及引理2知

$$m(t)\le\frac{1}{\sqrt{M}}e^{\sqrt{M}}(e^{2\sqrt{M}}-1)(L_1+M+L_2+L_3k_0+2L_4h_0)\max(m(I),n(I)),$$

$$n(t)\le\frac{1}{\sqrt{M}}e^{\sqrt{M}}(e^{2\sqrt{M}}-1)(L_1+M+L_2+L_3k_0+2L_4h_0)\max(m(I),n(I)),$$

令 $p(t)=\max(m(t),n(t))$,则 $p(t)\le\frac{1}{\sqrt{M}}e^{\sqrt{M}}(e^{2\sqrt{M}}-1)(L_1+M+L_2+L_3k_0+2L_4h_0)\,p(I)$,再由引理1及(6)式得 $p(I)=\max\limits_{t\in I}p(t)\le\frac{1}{\sqrt{M}}e^{\sqrt{M}}(e^{2\sqrt{M}}-1)(L_1+M+L_2+L_3k_0+2L_4h_0)\,p(I)<p(I)$,矛盾.于是证明了 $\{\tau_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}$ 是 E 中相对紧集,因而由Ascoli-Arzela定理知 $\{\tau_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 为相对紧集,故存在收敛的子列,再由 $\{\tau_n\}$ 的单调性及 P_c 的正规性知 $\{\tau_n\}$ 收敛,同理可证 $\{\omega_n\}$ 收敛,即 $\{\tau_n(t)\}$, $\{\omega_n(t)\}$ 关于 $t\in I$ 一致收敛.设 $\tau_n(t)\Rightarrow\tau^*(t)$, $\omega_n(t)\Rightarrow\omega^*(t)$ $(n\to\infty)$,则利用常规证法易证 $\tau^*,\omega^*\in C^2[I,E]$ 且

$$\begin{cases}-\tau^{*\prime\prime}=f(t,\tau^*,\omega^*,T\tau^*,S\omega^*),\ \tau^*(0)=\tau^*(1)=\theta,\\-\omega^{*\prime\prime}=f(t,\omega^*,\tau^*,T\omega^*,S\tau^*),\ \omega^*(0)=\omega^*(1)=\theta,\end{cases}\qquad($$

$\tau^* = A(\tau^*, \omega^*) \le A(x, x) = Fx \le A(\omega^*, \tau^*) = \omega^*$,即 $F:[\tau^*, \omega^*] \to [\tau^*, \omega^*]$. 由连续算子的定义易证 F 是连续的,对 $[\tau^*, \omega^*]$ 中任一可数集 $C = \{u_n | n = 1,2,\cdots\}$. 对某个 $x \in [\tau^*, \omega^*]$, $\overline{C} = \overline{\mathrm{co}}\{\{x\} \cup F(C)\} = \overline{\mathrm{co}}(\{x\} \cup \{A(u_n, u_n) | n = 1,2,\cdots\})$. 由非紧性测度的性质知 $\alpha(C) = \alpha(\overline{C}) = \alpha(F(C)) = \alpha(\{A(u_n, u_n) | n = 1,2,\cdots\})$,而

$$A(u_n(t), u_n(t)) = \int_0^1 G(t,s)[f(s, u_n(s), u_n(s), (Tu_n)(s), (Su_n)(s)) + Mu_n(s)] ds, \tag{15}$$

类似于前面的证明知 $\{f(t, u_n(t), u_n(t), (Tu_n)(t), (Su_n)(t)) + Mu_n(t) | n = 1,2,\cdots\}$ 关于 $t \in I$ 一致有界,又因为 $G(t,s)$ 关于 $(t,s) \in I \times I$ 连续,从而由(15)式知 $\{A(u_n, u_n) | n = 1, 2,\cdots\} = F(C)$ 等度连续,有界. 由前面的证明过程可假设 E 为可分 Banach 空间,这样利用(15)式及引理 2 知,对任给 $t \in I$,有

$$\begin{aligned}\alpha(F(C)(t)) &= \alpha(\{A(u_n(t), u_n(t)) | n = 1,2,\cdots\}) \\ &= \alpha\Big(\int_0^1 G(t,s)[f(s, C(s), C(s), (TC)(s), (SC)(s)) + MC(s)] ds\Big) \\ &\le \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\sqrt{M}} (e^{2\sqrt{M}} - 1)(L_1 + L_2 + M + L_3 k_0 + 2L_4 h_0)\, \alpha((FC)(I)),\end{aligned}$$

由此及(6)式知 $(FC)(t)$ 相对紧,再由 Ascoli-Arzela 定理知 $F(C)$ 相对紧. 即 $\alpha(C) = \alpha(F(C)) = 0$,于是知 c 相对紧,这样由引理 3 知算子 F 在 $[\tau^*, \omega^*]$ 中存在不动点 $\overline{u}$,即 $A(\overline{u}, \overline{u}) = F\overline{u} = \overline{u}$,这就意味着 $\overline{u}$ 为两点边值问题(1)的解.

注　本文结论推广了[5]中主要结果.

参　考　文　献

[1]　郭大钧, 非线性泛函分析, 山东科技出版社, 1985, 234 - 236.

[2]　郭大钧、孙经先, 抽象空间常微分方程, 山东科技出版社, 1989, 3.

[3]　H. Mönch and G. Harten Von, *On the cauchy problem for ordinary differential equations in Banach space*, Arch. Math., 39(1982), 153 - 160.

[4]　H. Mönch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, Nonl. Anal. TMA., 4:5(1980), 985 - 999.

[5]　宋福民, Banach 空间中两点边值问题的解, 数学年刊, 14A:6(1993), 692 - 697.

The Solution of Mixed Type Integro-Differential Equation of Two Points Boundary Value Problem in Banach Space

Zhang Kemei

(Dept. of Math., Qufu Normal University, Shandong 273165)

Abstract

In this paper, a solution of two points boundary value problem of differential equation is obtained. The result in this paper generalized the conclusion in [5].

Keywords　normal cone, coupled quasi-solutions, measure of noncompactness.