

有限子集系的 Sperner 系*

黄 国 泰

(海南师范学院, 海口 571158)

摘 要 1980 年, Ko-Wei Lih 提出如下猜想: 如果 F 是由 B^n 中固定秩的不同元素生成的序理想, 那么 F 是 Sperner 系. 本文证实了当 F 是由 X 的子集 Y 的所有相同秩的元素生成的序理想, 猜想是正确的.

关键词 有限子集系, Sperner 系, 猜想.

分类号 AMS(1991) 05D/ CCL O157.1

1 引 言

设 $(P, \leq)$ 是一有限偏序集, r 是 P 上非负整数值函数, 满足

(1) 对每个极小元 x , 有 $r(x) = 0$;

(2) 如果 $x < y$, 且不存在 $z \in P$, 使得 $x < z < y$, 那么 $r(y) = r(x) + 1$, 称 r 为 P 上的秩函数, $r(x)$ 叫做 x 的秩. 并把具有秩函数的有限偏序集叫做层次有限偏序集.

若 $A \subseteq P$, 且任意的 $x, y \in A$, $x \neq y$, 有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$, 则称 A 为 P 上的反链.

记 $P_m = \{x \in P \mid r(x) = m\}$. 称 $P_m = |P_m|$ 为 P 的 m 层 Whitney 数.

如果 $\max_m \{P_m\} = \max\{|A| \mid A \text{ 为 } P \text{ 的反链}\}$, 那么称 P 为 Sperner 系. $\max\{P_m\}$ 为 P 的 Sperner 数.

P 的一个子集 F 称为 P 的一个序理想, 如果对任意的 $a \in F$ 和 $b \in P$, 若 $a \leq b$, 则 $b \in F$.

由 $a(a \in P)$ 生成的主序理想, 是集合

$$a = \{b \mid b \in P, b \geq a\}$$

并把由 $a_1, \dots, a_k (a_i \in P, i = 1, \dots, k)$ 生成的序理想定义为

$$a_1, \dots, a_k = a_1 \cup \dots \cup a_k.$$

若 $r(a_1) = \dots = r(a_k)$, 定义

$$r'(x) = r(x) - r(a_1), x \in a_1, \dots, a_k,$$

显然 r' 是 $a_1, \dots, a_k$ 上的秩函数, 所以 $a_1, \dots, a_k$ 也是层次有限偏序集.

在这篇文章所讨论的偏序集是有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$ 的所有子集构成的 Boolean 代数 B^n , 它的序关系定为集合的包含关系. 秩函数 r 为

$$r(x) = |x|, x \in B^n.$$

* 1995 年 4 月 17 日收到. 国家自然科学基金项目.

显然, B^n 是一层次有限偏序集. 并把 B^n 的非空子集称为有限子集系.

早在 1928 年, Sperner 在文献[1]中证明了:

定理 1.15 B^n 是 Sperner 系, 且它的 Sperner 数为 $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数. $\binom{n}{l}$ 表示 n 的 l 组合数.

此后, 寻找具有什么条件的有限子集系是 Sperner 系一直是一个热门的研究课题(见[3] - [5]), 1980 年, Ko-Wei Lih 在文献[2]中获得了如下结果.

定理 1.2 设 $a_1, \dots, a_k, 0 < k \leq n$, 是 B^n 中秩为 1 的 k 个不同元素, 则 $F = \{a_1, \dots, a_k\}$ 是 Sperner 系, 且它的 Sperner 数是 $\binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}$.

并提出下面猜想.

猜想 如果 F 是由 B^n 中固定秩的不同元素生成序理想, 那么 F 是 Sperner 系.

这篇文章推广了 Ko-Wei Lih 的结果, 证实了当 F 是由 X 的子集 Y 的所有相同秩的元素生成序理想, 猜想是正确的.

2 主要结果

设 $Y \subseteq X, |Y| = k, 0 < k \leq n$, 记 $F = \{a \subseteq Y \mid r(a) = t\}$, 显然, F 是层次有限偏序集.

为了证明 F 是 Sperner 系, 先来介绍并证明几个引理.

令 $A = \{A \mid A \text{ 是 } F \text{ 上容量最大反链}\}$, 显然 $A \neq \emptyset$.

定义 2.1 若 $A_1, A_2 \in A$, 且对任意 $x \in A_1$, 存在 $y \in A_2$, 使得 $x \subseteq y$, 那么称 A_2 优于 A_1 , 记作 $A_1 \leq A_2$. 如果存在 $x' \in A_1$ 和 $y' \in A_2$, 使得 $x' \subset y'$, 那么称 A_2 真优于 A_1 , 并记作 $A_1 < A_2$.

不难验证, $(A, \leq)$ 是有限偏序集.

定义 2.2 若 $A_1, A_2 \in A$, 分别把 A_1, A_2 中所有极大元构成集合和 A_1, A_2 中所有极小元构成集合, 称为 A_1 和 A_2 的极大元集与 A_1 和 A_2 的极小元集, 记作 A_1^+, A_2^+ 和 A_1^-, A_2^- .

易证, A_1^+, A_2^+ 和 A_1^-, A_2^- 都是 F 的反链. 且 $A_1^+ \leq A_1^+, A_2^+ \leq A_1^+, A_2^+$ 和 $A_1^- \geq A_1^-, A_2^- \geq A_1^-, A_2^-$.

引理 2.3 若 A_1 和 A_2 都是 F 容量最大的反链, 不妨设, $A_1 = \{x_1, \dots, x_h\}, A_2 = \{y_1, \dots, y_h\}$. 不失一般性, 令

$$A_1 \cap A_2 = \{x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_s\},$$

$$A_1 \setminus A_2 = \{x_{l+1}, \dots, x_h, y_{s+1}, \dots, y_h\}.$$

如果 $l + s < h$, 那么 $A_1 \cap A_2$ 是容量大于 h 的反链. 产生矛盾. 从而 $l + s \geq h$. 由反链最大容量为 h , 所以 $l + s = h$. 因此, $A_1 \cap A_2$ 仍为容量最大的反链.

同理可得, $A_1 \cap A_2$ 是容量最大的反链. □

引理 2.4 设 f 是 F 上序自同构映象, 且 A 是 $(A, \leq)$ 的极大元, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, 那么 $f(A) = A$.

证明 因为 f 是 F 上序自同构映象. 所以, $A \subseteq f(A) \subseteq A$. 又由引理 2.3, 得

$$A \subseteq f(A) \subseteq A.$$

又 $A \subseteq f(A) \subseteq A$, A 是极大元, 有 $A \subseteq f(A) = A$. 从而, $f(A) \subseteq A$.

假如 $f(A) \neq A$, 亦即 $f(A) < A$. 于是, 存在 $y \in f(A)$, $x \in A$, 使得 $y \subset x$. 由 $y \in f(A)$, 存在 $z \in A$, 使得 $f(z) = y \subset x$. 又 f 是序自同构映象, 有 $f^2(z) \subseteq f(x)$.

如 $f^2(z) = f(x)$, 那么有 $f(f(z)) = f(y) = f(x)$. 从而得 $y \neq x$. 但 $f(y) = f(x)$, 与 f 是同构映象矛盾. 所以, $f^2(z) \subset f(x)$. 由定义 2.1, 得 $f^2(A_1) < f(A)$.

反复上述过程, 有 $f^3(A) < f^2(A)$.

因为 F 是有限的, 必有某个正整数, 使得 $f^l(A) = A$. 因此, 有 $A = f^l(A) < f^{l-1}(A) < \dots < f(A) < A$, 矛盾. 所以, 得 $f(A) = A$. $\square$

令

$$B^k = \{x \mid x \subseteq Y\},$$

$$B^{n-k} = \{x \mid x \subseteq X \setminus Y\},$$

$$B^k \times B^{n-k} = \{(x, y) \mid x \in B^k, y \in B^{n-k}\}.$$

又令 $B_{\geq k}^k = \{x \mid x \in B^k, |x| \geq k\}$, 显然, $B^n \cong B^k \times B^{n-k}$, $F \cong B_{\geq t}^k \times B^{n-k}$, 其中 $\cong$ 表示序同构.

在 F 上定义投影算子如下,

$$p_1(x) = x \cap Y, \quad p_2(x) = x \cap (X \setminus Y), \quad x \in F.$$

为了叙述上的方便, 作下面规定,

(1) $x \in F$, 意味 $(p_1(x), p_2(x)) \in B_{\geq t}^k \times B^{n-k}$;

(2) $x \in B_{\geq t}^k \times B^{n-k}$, 意味 $p_1(x) \in B_{\geq t}^k, p_2(x) \in B^{n-k}$. 从而, 可以把 x 和 $(p_1(x), p_2(x))$

理解为同一个东西.

又记 $A_i^1 = \{p_1(x) \mid x \in A, |p_1(x)| = i\}$, $A_i^1 = \bigcup_{t \leq i \leq k} A_i^1, A_j^2 = \{p_2(x) \mid x \in A, |p_2(x)| = j\}$, $A^2 = \bigcup_{0 \leq j \leq n-k} A_j^2$. 从而有

$$A \cong A^1 \times A^2 = \left(\bigcup_{t \leq i \leq k} A_i^1 \right) \times \left(\bigcup_{0 \leq j \leq n-k} A_j^2 \right) = \bigcup_{\substack{t \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq n-k}} A_i^1 \times A_j^2.$$

又 $B_i^k = \{x \mid x \in B^k, |x| = i\}$, $B_j^{n-k} = \{x \mid x \in B^{n-k}, |x| = j\}$, 于是, 有

$$F \cong B_{\geq t}^k \times B^{n-k} = \bigcup_{t \leq i \leq k} B_i^k \times B^{n-k} = \bigcup_{0 \leq j \leq n-k} B_{\geq t}^k \times B_j^{n-k} = \bigcup_{\substack{t \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq n-k}} B_i^k \times B_j^{n-k},$$

并称 $B_i^k \times B^{n-k}$ 为纵带; $B_{\geq t}^k \times B_j^{n-k}$ 为横带; $B_i^k \times B_j^{n-k}$ 为块.

引理 2.5 设 A 为 $(A, \leq)$ 的极大元, 如果 $x, y \in A_i^1 \times A_j^2$, 那么存在某个 j ($0 \leq j \leq n-k$) 使得 $x, y \in A_i^1 \times A_j^2$.

证明 由 $x, y \in A_i^1 \times A^2$ 得, $|p_1(x)| = |p_1(y)| = i$, 如果 $|p_2(x)| \neq |p_2(y)|$. 不妨设 $|p_2(x)| < |p_2(y)|$. 因此, 取 $x' \in B_i^k \times B^{n-k}$, 使得 $x' \supset x$, 且 $|p_2(x')| = |p_2(y)|$.

定义映象 f 如下:

(1) 因为 $|p_1(x)| = |p_1(y)|$, 所以, 必存在从 $p_1(y)$ 到 $p_1(x)$ 上的双射. 不妨设

$$f_1: p_1(y) \rightarrow p_1(x).$$

(2) 因为 $|Y \setminus p_1(x)| = |Y \setminus p_1(y)|$, 从而, 必有从 $Y \setminus p_1(y)$ 到 $Y \setminus p_1(x)$ 上的双射. 不妨记为 $f_2: Y \setminus p_1(y) \rightarrow Y \setminus p_1(x)$.

(3) 由 $|p_2(x)| = |p_2(y)|$, 于是, 必有双射 $f_3: p_2(y) \rightarrow p_2(x)$.

(4) 同理有双射 $f_4: (X \setminus Y) \setminus p_2(y) \rightarrow (X \setminus Y) \setminus p_2(x)$. 从而, 记

$$\begin{aligned} f(a) &= \begin{cases} f_1(a), & a \in p_1(y), \\ f_2(a), & a \in Y \setminus p_1(y), \\ f_3(a), & a \in p_2(y), \\ f_4(a), & a \in (X \setminus Y) \setminus p_2(y). \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_1(a), & a \in p_1(y), \\ f_2(a), & a \in Y \setminus p_1(y), \\ f_3(a), & a \in p_2(y), \\ f_4(a), & a \in (X \setminus Y) \setminus p_2(y). \end{cases} \end{aligned}$$

易证, f 是 $\mathbf{F}$ 上序自同构映象, 且 $f(x) = y'$.

由引理 2.4, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. 于是, $y, f(x) \in \mathbf{A}$, 而 $y \subset y' = f(x)$, 出现矛盾. □

定理 2.8 设 Y 是 $X = \{1, \dots, n\}$ 的一个子集, $|Y| = k, 0 < k \leq n$, 则 $F = \{A \subseteq Y \mid |A| = t\} < a, 0 < t$

$\leq k$, 是 Sperner 系.

证明 设 A 是 $(A, \subseteq)$ 的极大元. 并记

$$m_0 = \min\{k - t + 1, n - k + 1\}$$

由引理 2.7, 不妨设 $A \cong \bigtimes_{h=1}^m A_{i_h}^1 \times A_{j_h}^2, 1 \leq m \leq m_0$, 且 $t \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k, 0 \leq j_m < \dots < j_1 \leq n - k$.

$$\text{令 } d(A) = \max_{1 \leq h \leq m} \{i_h + j_h\} - \min_{1 \leq h \leq m} \{i_h + j_h\}.$$

因为 F_s 是反链, 由 A 是容量最大的反链, 显然, $|A| \leq \max_s \{f_s\}$. 因此, 只须证

$$|A| \leq \max_s \{f_s\}$$

即可.

若 $d(A) = 0$, 那么 $i_1 + j_1 = i_2 + j_2 = \dots = i_m + j_m$, 所以, $A \subseteq F_{i_1 + j_1}$, 从而, 有

$$|A| \leq \max_s \{f_s\}$$

□

若 $d(A) > 0$. 记 $h_0 = \min\{h \mid i_h + j_h \neq i_{h+1} + j_{h+1}\}$. 那么 $i_{h_0+1} \geq i_{h_0} + 2$ 和 $j_{h_0} \geq j_{h_0+1} + 2$ 之一成立. 因为, 如果两者均不成立. 于是, 有 $i_{h_0+1} < i_{h_0} + 2$ 和 $j_{h_0} < j_{h_0+1} + 2$. 由上述假定, 得 $i_{h_0+1} = i_{h_0} + 1$ 和 $j_{h_0} < j_{h_0+1} + 2$. 亦即 $i_{h_0} + j_{h_0} = j_{h_0+1} + i_{h_0+1}$. 与 h_0 定义不符.

假定 $j_{h_0} \geq j_{h_0+1} + 2$ 成立 (对于 $i_{h_0+1} \geq i_{h_0} + 2$ 的情况. 类似可以证明) 现在分两种情况证明.

情况 1 如果 $\binom{n-k}{j_{h_0}} < \binom{n-k}{j_{h_0}+1}$, 由二项式系数的单峰性, 得

$$\binom{n-k}{j_m} < \binom{n-k}{j_m+1} < \dots < \binom{n-k}{j_{h_0}+1} < \binom{n-k}{j_{h_0+1}+1} < \binom{n-k}{j_{h_0}} < \binom{n-k}{j_{h_0}+1}.$$

令 $\partial(A_j^2) = \{y \mid \exists x \in B_{j+1}^{n-k} \text{ 存在 } x \subset A_j^2\}$. 不难证明

$$|\partial(A_{j_m}^2)| \geq |A_{j_m}^2|, \dots, |\partial(A_{j_{h_0+1}}^2)| \geq |A_{j_{h_0+1}}^2|.$$

又令 $A' = \bigtimes_{l=1}^{h_0} A_{i_l}^1 \times A_{j_l}^2 \cup \bigtimes_{l=h_0+1}^m A_{i_l}^1 \times \partial(A_{j_l}^2)$. 显然, A' 仍是反链, 且 $|A'| \geq |A|$.

若 $d(A') = 0$, 则定理得证. 否则, 用 A' 代替 A , 反复上面过程, 最后直到它们之间下标之和恒等.

情况 2 如果 $\binom{n-k}{j_{h_0}} > \binom{n-k}{j_{h_0}+1}$, 由二项式系数的单峰性得

$$\binom{n-k}{j_{h_0}} > \binom{n-k}{j_{h_0}+1} > \dots > \binom{n-k}{j_{h_0}-1} > \binom{n-k}{j_{h_0-1}+1} > \binom{n-k}{j_{h_0}} > \binom{n-k}{j_{h_0}+1}.$$

令 $\rho(A_j^2) = \{y \mid \exists x \in B_{j-1}^{n-k} \text{ 存在 } x \supset A_j^2\}$. 容易验证, $|\rho(A_{j_1}^2)| \geq |A_{j_1}^2|, \dots, |\rho(A_{j_{h_0}}^2)|$

$$|\geq |A_{j_{h_0}}^2|.$$

记 $A' = \prod_{l=1}^{h_0} A_{i_l}^1 \times \rho(A_{j_l}^2) \quad (\prod_{l=h_0+1}^m A_{i_l}^1 \times A_{j_l}^2)$. 易证, A' 仍是反链, 且 $|A'| \geq |A|$.

如果 $d(A) = 0$, 那么定理获证. 否则, 用 A' 代替 A , 反复上述过程, 最后直到它们之间下标之和恒等.

综合上述情况 1 和情况 2, 得 $A \leq \max_s \{f_s\}$. □

定理 2.9 若 Y 是 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个子集, $|Y| = k, 0 < k \leq n$, 则 $F = \{A \subseteq Y \mid |A| = t\}$, $0 <$

$t \leq k$, 是层次有限偏序集, 且它的 Whitney 数为

$$f_m = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n-k}{m+t-i}.$$

证明 F 是层次有限偏序集是显然的, 因此, 只须求它的 Whitney 数 f_m .

因为 $F \cong \bigsqcup_{\substack{t \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq n-k}} B_i^k \times B_j^{n-k} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq n-k}} B_i^k \times B_j^{n-k} \setminus \bigsqcup_{\substack{0 \leq i \leq t-1 \\ 0 \leq j \leq n-k}} B_i^k \times B_j^{n-k}$, 于是, 有

$$F_m \cong \bigsqcup_{0 \leq i \leq k} B_i^k \times B_{m+t-i}^{n-k} \setminus \bigsqcup_{0 \leq i \leq t-1} B_i^k \times B_{m+t-i}^{n-k} = \bigsqcup_{t \leq i \leq k} B_i^k \times B_{m+t-i}^{n-k}.$$

从而得

$$f_m = |F_m| = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n-k}{m+t-i}.$$

□

参 考 文 献

- [1] E. Sperner, Ein satz über untermenge einer endlichen Mengt, Math. Z., 27(1928).
- [2] Ko-Wei Lih, Sperner families over a subset, J. Combinatorial Theory, Ser. A., 29(1980).
- [3] P. Erdős and D.J. Kleitman, Extremal problems among subsets of a set, Discrete Math., 8(1974).
- [4] 黄国泰, 无 k 个两两相交子集的子集系的最大容量, 数学研究与评论, 2(1987).
- [5] 黄国泰, 关于 Katona 和 Kleitman 定理推广, 数学年刊, (A)3(1987).

Sperner Systems of Family of Subsets of a Finite Set

Huang Guotai

(Hainan Normal College, Haikou 571158)

Abstract

In 1980, Lih Ko-wei proposed the following conjecture: If F is an ordered ideal generated by the different elements having fixed ranks is B^n , then F is a sperner system. In this paper, we prove that if F is an ordered ideal generated by all the same ranked elements of the subset Y of X , then the conjecture is true.

Keywords family of subsets, finite set, sperner system, conjecture.