第 18 卷第 3 期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 3
1998 年 8 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1998

单的完备 Lie 代数*

杨 国 庆
(烟台师范学院数学系, 烟台 264025)

摘 要 给出了一个 Heisenberg 代数与一个交换 Lie 代数的直和 $\mathfrak{g}_0$ 的全形 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 和 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 的导子代数 Der $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$. 证明了 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 不是一个完备 Lie 代数, 但 Der $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 是一个单完备 Lie 代数.

关键词 完备 Lie 代数, 全形, Heisenberg 代数.
分类号 AMS(1991) 17B/ CCL O152.5

1 引 言

一个 Lie 代数称为完备 Lie 代数如果它的中心为零且所有的导子都是内导子. 近几年完备 Lie 代数理论的发展很快, 在这方面取得了大量的成果(可参看 [2] — [6]). 但到目前为止, 仍有很多完备 Lie 代数不被所知, 因此寻找新的完备 Lie 代数仍是一个重要课题. 本文正是通过交换 Lie 代数和 Heisenberg 代数而得到了另一类重要的完备 Lie 代数. 本文中讨论的李代数总是复数域 **C** 上的有限维 Lie 代数.

2 主要结果

定义 1 一个 Lie 代数 H 称为 Heisenberg 代数如果 H 满足

$$\dim C(H) = 1, \tag{2.1}$$

$$[H, H] \subseteq C(H). \tag{2.2}$$

由 Heisenberg 代数的定义不难推出, 若 H 为 Heisenberg 代数, 则 H 的维数一定为奇数.

设 H 为一个 $2n+1$ 维的 Heisenberg 代数 $(n \geq 1)$, 记 c 为 H 的中心元. 在 H 中取一组基 $\{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}, c\}$ 满足

$$[p_i, p_{n+j}] = \delta_{ij}c,\ [p_i, p_j] = 0,\ [p_{n+i}, p_{n+j}] = 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$[p_i, c] = 0,\ i = 1, 2, \cdots, 2n.$$

设 $\mathfrak{a}$ 为一个 m 维交换 Lie 代数, 取 $\mathfrak{a}$ 的一组基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. 定义

$$\mathfrak{g}_0 = H \oplus \mathfrak{a},$$

$\mathfrak{g}_0$ 中的换位运算为:

* 1995 年 6 月 20 日收到.

$$[h_1 + y_1, h_2 + y_2] = [h_1, h_2],$$

其中 $h_1, h_2 \in H, y_1, y_2 \in \mathfrak{a}$.则 $\mathfrak{g}_0$ 为 Lie 代数,且$\{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}, x_1, \cdots, x_m, c\}$为 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. 定义 $\mathfrak{g}_0$ 上的反对称双线性型 Ψ 如下:

$$\Psi(p_i, p_{n+j}) = -\Psi(p_{n+j}, p_i) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\Psi(p_i, p_j) = \Psi(p_{n+i}, p_{n+j}) = 0, i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\Psi(p_i, x_j) = \Psi(x_k, x_j) = 0, i = 1, 2, \cdots, 2n, k, j = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\Psi(x_j, c) = \Psi(p_i, c) = 0, i = 1, 2, \cdots, 2n, j = 1, 2, \cdots, m.$$

则 Ψ 对应基$\{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}, x_1, x_2, \cdots, x_m, c\}$的矩阵为

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

将 $\mathfrak{g}_0$ 上的线性变换 A 在基$\{p_1, \cdots, p_{2n}, x_1, \cdots, x_m, c\}$下的矩阵仍记为 A,为方便起见,下面用矩阵代表 $\mathfrak{g}_0$ 上的线性变换.

引理 1 设 D 为 $\mathfrak{g}_0$ 上的线性变换,则 D 为 $\mathfrak{g}_0$ 的导子的充要条件是 D 可以写成以下形式:

$$D = \begin{pmatrix} M & P & 0 & 0 \\ Q & -M^t + \lambda E & 0 & 0 \\ N & S & A & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \lambda \end{pmatrix},$$

其中 $P, Q, M \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 且 $P^t = P, Q^t = Q, N, S \in \mathbf{C}^{m \times n}, A \in \mathbf{C}^{m \times m}, A_1, A_2 \in \mathbf{C}^{1 \times n}, A_3 \in \mathbf{C}^{1 \times m}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

证明 设 D 为 $\mathfrak{g}_0$ 上的线性变换,由导子的定义,$D \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的充要条件是对 $\forall x, y \in \mathfrak{g}_0$ 有

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy],$$

即 $\Psi(x, y) Dc = (\Psi(Dx, y) + \Psi(x, Dy)) c$. 由此不难推出引理成立.

令

$$\mathfrak{r}_0 = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} \right\},$$

$$\mathfrak{r}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N & S & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & 0 \end{pmatrix} \middle| N, S \in \mathbf{C}^{m \times n}, A_1, A_2 \in \mathbf{C}^{1 \times n} \right\},$$

$$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{pmatrix} M & P & 0 & 0 \\ Q & -M^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| M, P, Q \in \mathbf{C}^{n \times n}, A \in \mathbf{C}^{m \times n} \text{且 } P^t = P, Q^t = Q, \mathrm{tr}A = 0 \right\}.$$

定理 1　1) $\mathfrak{s}$ 同构于半单 Lie 代数 $sp(2n,\mathbf{C})\oplus s(m,\mathbf{C})$，其中 $sp(2n,\mathbf{C})$ 为辛代数，$s(m,\mathbf{C})$ 为特殊线性李代数.

2) $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0=\mathfrak{s}+\mathfrak{r}_0+\mathfrak{r}_n$，且 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的极大半单子代数，称为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的 Levi 子代数，$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\mathfrak{r}_n$ 为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的极大可解理想，称为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的根基.

3) $\mathfrak{r}_n=[\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0,\mathfrak{r}]$ 为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的极大幂零理想，称为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_0$ 的幂零根基.

定义 2　设 $\mathfrak{g}$ 为任一个 Lie 代数，$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的导子代数. 定义

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\dotplus\mathrm{Der}\,\mathfrak{g},$$

$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 中的换位运算为

$$[y_1+D_1,y_2+D_2]=[y_1,y_2]+D_1(y_2)-D_2(y_1)+[D_1,D_2],$$

则 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 为一个 Lie 代数，称为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的全形.

令

$$\mathfrak{r}_1=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\N&S&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\middle|\, N,S\in\mathbf{C}^{m\times n}\right\},$$

$$\mathfrak{r}_2=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&A_3&0\end{pmatrix}\middle|\, A_3\in\mathbf{C}^{m\times m}\right\},$$

$$\mathfrak{r}_3=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\A_1&A_2&0&0\end{pmatrix}\middle|\, A_1,A_2\in\mathbf{C}^{1\times n}\right\}.$$

引理 2　1) $\mathfrak{r}_i,H,\mathfrak{a}\ (i=1,2,3)$ 均为不可约 $\mathfrak{s}$-模.

2) $[\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2]=\mathfrak{r}_3=\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0$，$[\mathfrak{r}_1,H]=\mathfrak{a}$.

3) $[\mathfrak{r}_2,\mathfrak{r}_3]=[\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_3]=[\mathfrak{r}_i,\mathfrak{r}_i]=(0)$，$i=1,2,3$. □

设 e_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1 其余元素均为零的矩阵，在 $\mathfrak{s}$ 中取元素如下：

$\alpha^{\vee}=e_{ii}-e_{n+i,n+i}$，$i=1,2,\cdots,n$；

$\alpha^{\vee}_{n+j}=e_{2n+j,2n+j}-e_{2n+j+1,2n+j+1}$，$j=1,2,\cdots,m-1$；

$$\alpha^{\vee}_{n+m}=\sum_{i=1}^{2n}e_{ii}+2e_{2n+m+1,2n+m+1},\quad \alpha^{\vee}_{n+m+1}=\sum_{j=1}^{m}e_{2n+j,2n+j}.$$

引理 3　设 $\mathfrak{h}$ 为由 $\{\alpha_1^{\vee},\alpha_2^{\vee},\cdots,\alpha_{n+m+1}^{\vee}\}$ 生成的子代数，则 $\mathfrak{h}$ 可交换且为 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 的 Cartan 子代数. □

设 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+m+1}\}\subset\mathfrak{h}^*$ 满足

$$(\alpha_i(\alpha_j^{\vee}))_{i,j=1}^{2n+m+1}=\begin{pmatrix}D_1&0&0\\0&D_2&0\\A_1&A_2&A_3\end{pmatrix},$$

其中

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\end{pmatrix}\text{ 为 } n \text{ 阶方阵},$$

$$D_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{pmatrix}\text{ 为 } m-1 \text{ 阶方阵},$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},$$

则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+m+1}\}$为$\mathfrak{h}^*$的一组基.

引理 4 $\mathfrak{g}_{\alpha_i}=e_{i,i+1}-e_{n+i+1,n+i}$, $\mathfrak{g}_{\alpha_n}=e_{n,2n}$, $i=1,2,\cdots,n-1$;

$\mathfrak{g}_{\alpha_{n+j}}=e_{2n+j,2n+j+1}$, $j=1,2,\cdots,m-1$;

$\mathfrak{g}_{\alpha_{n+m}}=e_{2n+1,1}$, $j\alpha_{n+m+1}=e_{2n+m+1,2n+1}$;

$\mathfrak{g}_{-\alpha_{n+m}}=\mathfrak{g}_{-\alpha_{n+m+1}}=(0)$,

其中$\mathfrak{g}_\alpha=\{x\in\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)\mid[h,x]=\alpha(h)x$,对所有的$h\in\mathfrak{h}$,$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$为$\mathfrak{g}_0$的全形$\}$.

引理 5 1) $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$,其中$\Delta\subset\mathfrak{h}^*-(0)$.

2) 令$\beta_0=\alpha_{n+m}+\alpha_{n+m+1}$,$\alpha_0=0$,则

$\mathfrak{g}_{\alpha_i+\beta_0}=\mathbf{C}e_{2n+m+1,i+1}+\mathbf{C}p_{n+i+1}$, $i=0,1,2,\cdots,n-1$;

$\mathfrak{g}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+2\alpha_i+\cdots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n+\beta_0}=\mathbf{C}e_{2n+m+1,n+i}+\mathbf{C}p_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$;

$\mathfrak{g}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_0}=\mathbf{C}e_{2n+m+1,2n}+\mathbf{C}p_n$.

对其余的$\alpha\in\Delta$,有$\dim\mathfrak{g}_\alpha\leq1$.

3) $\{\alpha_{n+m}^\vee,\alpha_{n+m+1}^\vee\}$及$\{\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i},\mathfrak{g}_{\beta_0}\mid i=1,2,\cdots,n+m+1\}$生成了$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$.

定理 2 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$不是一个完备 Lie 代数.

证明 由定理 1,有

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})=\mathfrak{j}+\mathfrak{r}_0+\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3+H+\mathfrak{a}.$$

定义$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$上的线性变换$D_0$如下:

$D_0|_{\mathfrak{j}+\mathfrak{a}+\mathfrak{r}_0}=0$, $D_0|_{\mathfrak{r}_1}=id|_{\mathfrak{r}_1}$, $D_0|_{\mathfrak{r}_2}=id|_{\mathfrak{r}_2}$,

$D_0|_{\mathfrak{r}_3}=2id|_{\mathfrak{r}_3}$, $D_0(c)=2c$,

$D_0(p_i)=e_{2n+m+1,n+i}$, $D_0(p_{n+i})=-e_{2n+m+1,i}$, $i=1,2,\cdots,n$.

直接验证便知$D_0\in\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$.但$H$为$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$的理想,所以$D_0$不是$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$的内导子. □

引理 6[4] 设$D\in\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$且$D(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}$,则$D(\mathfrak{h})=(0)$且$D\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}_\alpha$,$\alpha\in\Delta$.

引理 7[4] 设$D\in\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$,则对$\forall h\in\mathfrak{h}$有

$$Dh=h'+\sum_{\alpha\in\Delta}[h,X_\alpha],$$

其中 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 且 X_α 与 h 的选择无关. □

引理 8 设 $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_0)$ 且 $D(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. 若

$$De_{2n+m+1,1} = \lambda_1 e_{2n+m+1,1},$$

$$Dp_{n+1} = \mu_1 p_{n+1}.$$

则存在 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 使得 $D = ad h_0$.

证明 由引理 6, 可设 $De_{1,n+1} = \lambda e_{1,n+1}$. 于是

$$Dp_1 = D[e_{1,n+1}, p_{n+1}] = (\lambda + \mu_1) p_1,$$

$$Dc = D[e_{2n+m+1}, p_1] = (\lambda_1 + \lambda + \mu_1) c,$$

$$Dc = D[p_1, p_{n+1}] = (\lambda + 2\mu_1) c.$$

所以 $\lambda_1 = \mu_1$. 因 $\dim \mathfrak{g}_{\beta_0} = 2$, 因此对 $\forall e_{\beta_0} \in \mathfrak{g}_{\beta_0}$ 均有

$$De_{\beta_0} = \lambda_1 e_{\beta_0}.$$

由引理 5 和引理 6, 对 $\forall e_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n+m+1$ 都有

$$De_{\alpha_i} = \lambda_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, \ i = 1, 2, \cdots, n+m+1.$$

所以 $\lambda_1 = \lambda_{\alpha_{n+m}} + \lambda_{\alpha_{n+m+1}}$. 由于 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+m+1}\}$ 为 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基, 所以存在 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 满足

$$\lambda_{\alpha_i} = \alpha_i(h_0).$$

由引理 5, $D = ad h_0$. □

定理 3 $\mathrm{Der}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_0) = ad_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_0) + \mathbf{C} D_0$.

证明 设 $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_0)$, 由引理 7 对 $\forall h \in \mathfrak{h}$, 有

$$Dh = h' + \sum_{\alpha \in \Delta} [h, X_\alpha].$$

令

$$D' = D + \sum_{\alpha \in \Delta} ad X_\alpha.$$

则 $D' \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_0)$ 且 $D'(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. 由引理 6 和引理 5, 有

$$D' e_{\alpha_i} = \lambda_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, \ i = 1, 2, \cdots, n+m+1.$$

因 $e_{2n+m+1,1} \subseteq [\mathbf{C} e_{\alpha_{n+m+1}}, \mathbf{C} e_{\alpha_{n+m}}]$, 所以

$$D' e_{2n+m+1,1} = (\lambda_{\alpha_{n+m}} + \lambda_{\alpha_{n+m+1}}) e_{2n+m+1,1}.$$

因为 $\mathfrak{g}_{\beta_0} = \mathbf{C} e_{2n+m+1,1} + \mathbf{C} p_{n+1}$, 所以可设

$$D' p_{n+1} = \mu_1 e_{2n+m+1,1} + \mu_2 p_{n+1}.$$

令

$$D_1 = D' + \mu_1 D_0.$$

则 $D_1 \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_0)$ 且

$$D_1 e_{2n+m+1,1} \in \mathbf{C} e_{2n+m+1,1}, \ Dp_{n+1} \in \mathbf{C} p_{n+1}.$$

由引理 8, 存在 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 使

$$D_1 = ad h_0.$$

因此

$$D = ad\left(h_0 - \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha\right) - \mu_1 D_0.$$ □

引理 9 $\mathfrak{h}_1 = ad\mathfrak{h} + \mathbf{C}D_0$ 为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 的 Cartan 子代数，且 $\mathfrak{h}_1$ 可交换. □

引理 10 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 和 $\mathfrak{h}_1$ 满足［4］中定理 3.3 的条件，因而 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 为一个完备 Lie 代数.

定理 4 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 为一个单完备 Lie 代数.

证明 设 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_{11} \oplus \mathfrak{g}_{12}$，$\mathfrak{g}_{11}$，$\mathfrak{g}_{12}$ 为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ 的完备理想. 因 $\mathfrak{i} = sp(2n,\mathbf{C}) \oplus s(m-1,\mathbf{C})$. 所以可设 $sp(2n,\mathbf{C}) \subseteq \mathfrak{g}_{11}$. 因为

$$[sp(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{r}_1] = \mathfrak{r}_1,\quad [sp(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{r}_3] = \mathfrak{r}_3,$$
$$[sp(2n,\mathbf{C}),H] = H.$$

所以 $sp(2n,\mathbf{C}) + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3 + H \subseteq \mathfrak{g}_{11}$. 若 $s(m-1,\mathbf{C}) \cap \mathfrak{g}_{11} = (0)$，则 $s(m-1,\mathbf{C}) \subseteq \mathfrak{g}_{12}$. 但

$$\mathfrak{r}_1 = [s(m-1,\mathbf{C}),\mathfrak{r}_1],$$

所以 $\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{g}_{12}$，这与 $\mathfrak{g}_{11} \cap \mathfrak{g}_{12} = (0)$ 矛盾. 因此 $s(m-1,\mathbf{C}) \subseteq \mathfrak{g}_{11}$. 由于

$$\mathfrak{r}_2 = [s(m-1,\mathbf{C}),\mathfrak{r}_2]$$

所以 $\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{g}_{11}$. 因此

$$\mathfrak{n} = [\mathfrak{r}_2, H] \subseteq \mathfrak{g}_{11}.$$

根据定理 2 $\mathfrak{g}_{11} = \mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$. □

参 考 文 献

[1] N. Jacobson, *Lie algebras*, Wiley (Interscience), New York, 1962.

[2] D. J. Meng, *Some results on complete Lie algebras*, Communications in Algebra, 22 (1994), 5457 - 5507.

[3] D. J. Meng and S. P. Wang, *On the construction of complete Lie algebras*, Journal of Algebra, 176 (1995), 621 - 637.

[4] D. J. Meng, *Complete Lie algebras and Heisenberg algebras*, Communications in Algebra, 22 (1994), 5509 - 5524.

[5] C. P. Jiang, D. J. Meng and S. Q. Zhang, *Some complete Lie algebras*, Journal of Algebra, 186 (1996), 807 - 817.

[6] D. J. Meng and L. S. Zhu, *Solvable complete Lie algebras*, Communications in Algebra, 24:13 (1996), 4181 - 4197.

Simple Complete Lie Algebras

Yang Guoqing

(Dept. of Math., Yantai Teachers' College, Shandong 264025)

Abstract

In this paper, the holomorph $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ of a Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ which is a driect sum of a Heisenberg algebra and an abelian Lie algebra is given. The derivation algebra $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ of $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ is also given. We prove that $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ is not a complete Lie algebra, but $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_0)$ is a simple complete Lie algebra.

Keywords complete Lie algebra, holomorph, Heisenberg algebra.