

一个四元数矩阵乘积奇异值的不等式及其应用*

吕蕴霞 苑致仲** 张树青

(烟台师范学院数学系, 烟台 264025)

摘要 本文得到了四元数矩阵乘积奇异值的一个不等式, 并且在四元数体上推广, 改进了有关矩阵乘积迹不等式的相应结果.

关键词 四元数体, 奇异值, 迹.

分类号 AMS(1991) 15A15, 15A33/ CCL O151.21

约定 $A(\geq 0) > 0$ 为四元数(半) 正定自共轭矩阵. 如果四元数矩阵 $A = (a_{ij}) (\Omega^{n \times n})$ 的特征值都是实数, 规定其特征值满足 $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$, 用 $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$ 表示 A 的几个奇异值, 规定 $\{\delta_1(A), \dots, \delta_n(A)\}$ 与 $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ 为同一集合且 $|\delta_1(A)| \geq \dots \geq |\delta_n(A)|$. 当实向量 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 与 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 的分量按递减顺序排列为 $x_{[1]} \geq \dots \geq x_{[n]}$ 与 $y_{[1]} \geq \dots \geq y_{[n]}$ 时, 若 $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, k = 1, 2, \dots, n$. 则称 y 弱控制 x , 记为 $x \prec_{\omega} y$.

文[1], [2] 等对四元数矩阵的奇异值问题作了许多研究. 相对于矩阵的奇异值而言, 四元数矩阵的迹的研究更为困难. 这是因为, 由于四元数体的非交换性的限制, 使得数域上矩阵迹的许多性质对四元数矩阵不再成立. 对此, 文[5]、[6] 等已在四元数体上推广, 改进或修正了通常矩阵迹的不少结果. 本文继续研究与四元数矩阵奇异值与迹有关的问题, 得到一个任意多个四元数矩阵乘积奇异值的不等式, 作为其应用得到的四元数矩阵乘积迹的不等式在四元数体上推广, 改进或修正了文[5] - [9] 等关于矩阵乘积迹不等式的相应结果.

将使用多因子的 Holder 不等式^[3]

$$\sum_{r=1}^k \prod_{t=1}^p a_{rt} \leq \prod_{t=1}^p \left(\sum_{r=1}^k a_{rt}^{a_t} \right)^{\frac{1}{a_t}}, a_{rt} \geq 0, a_t > 0 \text{ 且 } \sum_{t=1}^p a_t = 1. \quad (1)$$

由[4] 的平均值定理的推广形式知

$$\prod_{t=1}^p \left(\sum_{r=1}^k a_{rt}^{a_t} \right)^{\frac{1}{a_t}} \leq \sum_{t=1}^p a_t \sum_{r=1}^k a_{rt}^{\frac{1}{a_t}}, a_{rt} \geq 0, a_t > 0 \text{ 且 } \sum_{t=1}^p a_t = 1. \quad (2)$$

由[4] 知 Jensen 不等式可表为

$$\left(\sum_{s=1}^n a_s^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{s=1}^n a_s^l \right)^{\frac{1}{l}}, a_s \geq 0, 0 < l \leq r. \quad (3)$$

* 1995 年 4 月 5 日收到. 山东省自然科学基金资助项目.

** 作者单位为辽宁高等税务专科学校.

由[1] 知当 $A \in \Omega^{n \times n}$ 的对角元素为 $a_1, \dots, a_n$ 时有

$$(\operatorname{Re} a_1, \dots, \operatorname{Re} a_n) \prec_{\omega} (|a_1|, \dots, |a_n|) \prec_{\omega} (\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A)). \quad (4)$$

由[2] 知, 当 $A_t \in \Omega^{n \times n}, t = 1, 2, \dots, p$ 时

$$\sum_{r=1}^k \sigma_r \left(\prod_{t=1}^p A_t \right) \leq \sum_{r=1}^k \prod_{t=1}^p \sigma_r(A_t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

定理 设 $A_{st} \in \Omega^{n \times n}, s = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, p; a_t > 0$ 且 $\sum_{t=1}^p a_t = a \geq 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \left| \delta_r \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \right| &\leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \prod_{t=1}^p \sigma_r(A_{st}) \\ &\leq \prod_{t=1}^p \left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^{a_t}(A_{st}) \right]^{\frac{a}{a_t}} \leq \frac{1}{a} \sum_{t=1}^p a_t \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^{a_t}(A_{st}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

证明 由 $\sum_{t=1}^p \frac{a_t}{a} = 1, \frac{a_t}{a} > 0, t = 1, 2, \dots, p$ 及(4)、(5)、(1)、(2), 有

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \left| \delta_r \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \right| &\leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \prod_{t=1}^p \sigma_r(A_{st}) \\ &\leq \prod_{t=1}^p \left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^{a_t}(A_{st}) \right]^{\frac{a}{a_t}} \leq \sum_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{a_t}{a} \sigma_r^{a_t}(A_{st}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

即(6) 成立. □

推论 1 题设同于定理 1, 则

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) &\leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \prod_{t=1}^p \sigma_r(A_{st}) \leq \prod_{t=1}^p \left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^{a_t}(A_{st}) \right]^{\frac{a}{a_t}} \\ &\leq \prod_{t=1}^p \left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{a_t} \sigma_r^{a_t}(A_{st}) \right]^{\frac{a}{a_t}} \leq \sum_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k a_t \sigma_r^{a_t}(A_{st}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

证明 由 $\sum_{t=1}^p a_t = a \geq 1$ 及(3)

$$\left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^{a_t}(A_{st}) \right]^{\frac{1}{a}} = \left\{ \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \left[\sigma_r^{a_t}(A_{st}) \right]^{\frac{1}{a}} \right\}^{\frac{1}{a}} \leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^{a_t}(A_{st}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

这样由(2), (6) 知(7) 成立. 证毕.

由 $\sigma_r(A_{st}) = \lambda_r^{\frac{1}{2}}(A_{st}^* A_{st})$ 知, 对 $r = 1, 2, \dots, n$ 有

$$\sigma_r^{a_t}(A_{st}) = \left[\lambda_r^{\frac{1}{2}}(A_{st}^* A_{st}) \right]^{\frac{a}{a_t}} = \lambda_r \left((A_{st}^* A_{st})^{\frac{a}{2a_t}} \right).$$

这样分别在(6), (7) 中令 $k = n$, 由(4) 可得

推论 2 题设同于定理 1, 则

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) &\leq \sum_{s=1}^m \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \right| \leq \prod_{t=1}^p \left[\sum_{s=1}^m \operatorname{tr} (A_{st}^* A_{st})^{\frac{a}{2a_t}} \right]^{\frac{a}{a_t}} \\ &\leq \frac{1}{a} \sum_{t=1}^p a_t \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} (A_{st}^* A_{st})^{\frac{a}{2a_t}}. \end{aligned} \quad (8)$$

推论 3 题设同于定理 1, 则

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) &\leq \sum_{s=1}^m \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \right| \leq \prod_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} (A_{st}^* A_{st})^{\frac{1}{2} a_t} J^{\frac{a_t}{a}} \\ &\leq \prod_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} (A_{st}^* A_{st})^{\frac{1}{2} a_t} J^{a_t} \leq \sum_{t=1}^p a_t \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} (A_{st}^* A_{st})^{\frac{1}{2} a_t}. \end{aligned} \quad (9)$$

由(8)易得

推论 4 除设 $A_{st} (\geq 0)$ $\Omega^{n \times n}$, $s = 1, 2, \dots, m$; $t = 1, 2, \dots, p$ 外, 题设同于定理 1, 则

$$\sum_{s=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \leq \sum_{s=1}^m \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \right| \leq \prod_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} A_{st}^{\frac{a_t}{a}} J^{\frac{a_t}{a}} \leq \frac{1}{a} \sum_{t=1}^p a_t \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} A_{st}^{\frac{a_t}{a}}. \quad (10)$$

由(9)易得

推论 5 题设同推论 4, 则

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) &\leq \sum_{s=1}^m \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_{st} \right) \right| \leq \prod_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} A_{st}^{\frac{a_t}{a}} J^{\frac{a_t}{a}} \\ &\leq \prod_{t=1}^p \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} A_{st}^{\frac{1}{a_t}} J^{a_t} \leq \sum_{t=1}^p a_t \sum_{s=1}^m \operatorname{tr} A_{st}^{\frac{1}{a_t}}. \end{aligned} \quad (11)$$

当 $m = 1, p = 2$ 时, 由(6)可得

推论 6 设 $A, B \in \Omega^{n \times n}$, $p, q \geq 0$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = a \geq 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k \left| \delta_r(AB) \right| &\leq \sum_{r=1}^k \sigma_r(AB) \leq \frac{1}{ap} \sum_{r=1}^k \lambda_r(A^* A)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{aq} \sum_{r=1}^k \lambda_r(B^* B)^{\frac{q}{2}}, \\ k &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

特别地, 当 $k = n$ 时, 有

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr} AB \leq \frac{1}{ap} \operatorname{tr}(A^* A)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{aq} \operatorname{tr}(B^* B)^{\frac{q}{2}}. \quad (13)$$

当 $p = 2$ 时, 由(6), (10) 分别可得

推论 7 设 $A_s, B_s \in \Omega^{n \times n}$, $s = 1, 2, \dots, m$, $p, q > 0$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \left| \delta_r(A_s B_s) \right| &\leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r(A_s B_s) \leq \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r(A_s) \sigma_r(B_s) \\ &\leq \left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^p(A_s) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k \sigma_r^q(B_s) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (14)$$

特别当 $k = n$ 时, 有

$$\sum_{s=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{tr}(A_s B_s) \leq \left[\sum_{s=1}^m \operatorname{tr}(A_s^* A_s)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^m \operatorname{tr}(B_s^* B_s)^{\frac{q}{2}} \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (15)$$

推论 8 设 $A_s, B_s \geq 0$, $s = 1, 2, \dots, m$; $p, q > 0$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, 则

$$\sum_{s=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{tr}(A_s B_s) \leq \left(\sum_{s=1}^m \operatorname{tr} A_s^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^m \operatorname{tr} B_s^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (16)$$

当 $m = 1, p \geq 2$ 时, 由(8)可得

推论 9 设 $A_t \in \Omega^{n \times n}$, $t = 1, 2, \dots, p$, r 是自然数且 $r \leq p$, 则

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_t \right) \leq \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_t \right) \right| \leq \prod_{t=1}^p \left[\operatorname{tr} (A_t^* A_t)^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{r} \sum_{t=1}^p \operatorname{tr} (A_t^* A_t)^{\frac{r}{2}}. \quad (17)$$

推论 10 设 $A_t \geq 0, t = 1, 2, \dots, p, a_t > 0$ 且 $\sum_{t=1}^p a_t = a \geq 1$, 则

$$\left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^p A_t^{a_t} \right) \right| \leq \prod_{t=1}^m (\operatorname{tr} A_t)^{a_t} \leq \left(\sum_{t=1}^m \frac{a_t}{a} \operatorname{tr} A_t \right)^a. \quad (18)$$

证明 令 $B_t = A_t^{a_t}$, 则由(3) 知

$$(\operatorname{tr} A_t^a)^{\frac{1}{a}} = \left\{ \sum_{r=1}^n [\lambda_r(A_t)]^a \right\}^{\frac{1}{a}} \leq \sum_{r=1}^n \lambda_r(A_t) = \operatorname{tr} A_t,$$

这样由(9)

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^m A_t^{a_t} \right) \right| &= \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{t=1}^m B_t \right) \right| \leq \prod_{t=1}^m (\operatorname{tr} B_t)^{\frac{a_t}{a}} = \prod_{t=1}^m (\operatorname{tr} A_t^{a_t})^{\frac{a_t}{a}} \\ &\leq \prod_{t=1}^m (\operatorname{tr} A_t)^{a_t} \leq \left(\sum_{t=1}^m \frac{a_t}{a} \operatorname{tr} A_t \right)^a. \end{aligned}$$

□

参 考 文 献

- [1] 杨忠鹏, 与四元数矩阵迹有关的几个弱控制不等式, 烟台师范学院学报(自), 4(1993), 12—21.
- [2] 刘建洲, 四元数体上的矩阵及其优化理论, 数学学报, 6(1992), 831—838.
- [3] D. S. Mitrinovic and M. Vasic 著, 赵汉宾译, 分析不等式, 广西人民出版社, 1986.
- [4] 徐利治、王兴华, 数学分析的方法及例题选讲(修订版), 高等教育出版社, 1985.
- [5] 张树青, 关于四元数矩阵之迹的几个定理, 数学研究与评论, 4(1993), 567 - 572.
- [6] 张树青, 关于四元数矩阵乘积迹的一个不等式, 烟台师范学院学报(自), 1(1995), 1 - 5.
- [7] 杨忠鹏, 一个矩阵乘积的奇异值的不等式及应用, 吉林师范学院学报(自), 2(1994), 15—20.
- [8] 陈道琦, 关于矩阵奇异值的一些不等式, 数学年刊, 11A, 1(1990), 123 - 132.
- [9] 陈公宁, 对“关于半正定 Hermite 矩阵乘积迹的一个不等式”一文的注记, 数学学报, 5(1992), 620—622.

An Inequality for Singular Values of Product of Quaternion Matrices and Its Applications

Lü Yunxia Yuan Zhizhong^{*} Zhang Shuqing

(Dept. of Math., Yantai Teachers' College, Yantai 264025)

Abstract

In this paper, we obtain an inequality for singular values of product of quaternion matrices, generalize and improve some results about trace inequalities on product of matrices.

Keywords quaternion field, singular values, trace.

^{*} Liaoning Higher Tax College, Dalian 116000