

基于中介逻辑的时序逻辑系统*

施庆生^{1,2} 张东摩^{1,3} 朱梧楦^{1,3}

(¹ 南京航空航天大学计算机科学与工程系 南京, 210016)

(² 南京建筑工程学院基础部 南京, 210009)

(³ 南京大学软件高技术国家重点实验室 南京, 210008)

摘 要 本文基于中介逻辑建立了一种中介时序逻辑系统 MTL (Medium Temporal Logic), 文中着重讨论了 MTL 的形式系统并给出了它的语义解释, 证明了 MTL 系统的可靠性. 最后对 MTL 系统和经典时序命题逻辑系统进行对比, 指出经典时序命题逻辑系统是 MTL 的子系统.

关键词 中介逻辑, 时序逻辑, 命题逻辑, 中介时序逻辑.

分类号 AMS(1991) 03B55/ CCL O141

1 引 言

时序逻辑作为一种把时间概念直接引入其形式系统的逻辑系统, 它对于变化的世界具有很强的描述能力, 因而常被用作程序或并发程序的描述工具及验证系统^[1], 故近年来时序逻辑在计算机领域取得了广泛地应用, 这些应用反过来又促进了时序逻辑本身的研究与发展. 本文将基于中介逻辑建立一种中介时序逻辑系统 MTL (Medium Temporal Logic). 由于中介逻辑是一种特殊的三值逻辑系统, 因此本文建立的系统可以看成是对时序逻辑的三值扩充.

2 中介时序逻辑的语言构成

设 L^{MTL} 为由 $MP^{*[2]}$ 中所有逻辑符号及模态词 $\Box, \Diamond, \circ, \triangleright$ 构成的语言, 它包括:

- (1) 命题变元: $p_1, p_2, \dots$;
- (2) 逻辑联结词: $\sim, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, <, \Rightarrow, \infty$;
- (3) 模态词: $\Box, \Diamond, \circ, \triangleright$;
- (4) 技术符号: $(\), [\],$.

L^{MTL} 中的合式公式由下列规则生成:

- (1) p_i 为合式公式 ($i = 1, 2, \dots$);
- (2) 如果 A 为合式公式, 则 $\sim A, \neg A, \neg A \Box B, A \Box B, A \rightarrow B, A < B, A \Rightarrow B, A \infty B, \Box A, \Diamond A, \circ A, A \triangleright B$ 也为合式公式;

* 1995 年 3 月 16 日收到. 国家高技术研究发展计划 (863 - 05 - 04 - 3) 及国家自然科学基金资助项目.

(3) L^{MTL} 中的合式公式均由(1),(2)生成.

3 中介时序逻辑系统 MTL

中介时序逻辑系统 MTL 为语言 L^{MTL} 上的一种时序逻辑系统,它由下列公理及推理规则组成:

. MP^* 中的所有推理规则对 L^{MTL} 中的所有合式公式均成立.

. 若 $\vdash A$, 则 $\vdash \Box A$.

. $(K_1) \quad \Box(A < B) \vdash \Box A < \Box B$;

$(K_2) \quad \circ(A < B) \vdash \circ A < \circ B$;

$(K_3) \quad \Box(A \Rightarrow \circ A) \vdash A \Rightarrow \Box A$;

$(R_1) \quad A \vdash \Box A$;

$(R_2) \quad \sim \Box A \vdash \Box \neg A \quad \sim A$;

$(R_3) \quad \sim A \vdash \Box \neg A \quad \sim A$;

$(R_4) \quad \sim \circ A \vdash \circ \sim A$;

$(R_5) \quad \neg \circ A \vdash \circ \neg A$;

$(R_6) \quad A \triangleright B \vdash B \quad (A \quad \circ(A \triangleright B))$;

$(R_7) \quad \neg(A \triangleright B) \vdash \neg B \quad (\neg A \quad \circ \neg(A \triangleright B))$;

$(T_1) \quad \vdash \Box A < \circ A$;

$(T_2) \quad \vdash \Box A < A \quad \circ \Box A$;

$(T_3) \quad \vdash A \triangleright B < B$;

由文[3]可知在 MTL 中下列引理 1—引理 3 成立:

引理 1 若 $A \models B$, 则 $\Box A \models \Box B$.

引理 2 $A \models \neg \Box A$.

引理 3 若 $A \models B$, 则 $A \models \Box B$.

引理 4 若 $A \models B$, 则 $\circ A \models \circ B$

证明 因 $A \models B$, 故 $\vdash A \approx B$, 从而有 $\vdash A < B$ 及 $\vdash B < A$, 由前者 $\vdash \Box(A < B)$, 由 $(T_1) \vdash \circ(A < B)$, 由 $(K_2) \vdash \circ A < \circ B$. 同理可得 $\vdash \circ B < \circ A$, 故 $\vdash \circ A \approx \circ B$, 从而 $\circ A \models \circ B$.

引理 5

[1] 对任何公式 A , 若 $\vdash A$, 则 $\vdash \circ A$.

[2] 对任何公式 A , 有 $\vdash \circ A < A$.

[3] 对任何公式 A, B , 若 $A \vdash B$, 则 $\circ A \vdash \circ B$.

[4] 对任何公式 A , 若 $A \vdash \circ A$, 则 $A \vdash \Box A$.

证明 选证[3]

(1) $A \Rightarrow B$

(2) $A < (A < B)$

题设

“ $\Rightarrow$ ”定义

- (3) $\circ(A \prec (A \prec B))$ (2) [1]
 (4) $\circ A \prec \circ(A \prec B)$ (3) (K₂)
 (5) $\circ A \Rightarrow (\circ A \Rightarrow \circ B)$ (4) MP* 定理及 (K₂)
 (6) $(\circ A \Rightarrow (\circ A \Rightarrow \circ B)) \Rightarrow (\circ A \Rightarrow \circ B)$ (5) MP* 重言式
 (7) $\circ A \Rightarrow \circ B$

引理 6 在 MTL 中有:

- [1] $\Box(A \Rightarrow B) \vdash \Box A \Rightarrow \Box B$.
 [2] $\circ(A \Rightarrow B) \vdash \circ A \Rightarrow \circ B$.
 [3] $\circ(A \rightarrow B) \vdash \circ A \rightarrow \circ B$
 [4] $\circ(A \rightarrow B) \vdash \circ A \rightarrow \circ B$.
 [5] $\Box(A \rightarrow B) \vdash \Box A \rightarrow \Box B$.
 [6] $\Box(A \rightarrow B) \vdash \Box A \rightarrow \Box B$.
 [7] $(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$.
 [8] $(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$.
 [9] $\neg \Box A \vdash \neg A$ [10] $\neg A \vdash \neg \Box A$.

证明 选证[4]

- (1) $\circ(A \rightarrow B)$ 假设
 (2) $A \rightarrow B \prec \neg \neg A \rightarrow \neg \neg B$ MP* 定理
 (3) $\circ(A \rightarrow B) \prec \circ(\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B)$ (2) 引理 5[1] 及 (K₂)
 (4) $\circ(\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B)$ (1) (3) ($\prec$.)
 (5) $\neg \circ(\neg A \rightarrow \neg B)$ (4) MP* 定理及 (R₅)
 (6) $\neg \neg(\circ A \rightarrow \circ B)$ (5) [3] MP* 定理及 (R₅)
 (7) $\circ A \rightarrow \circ B$ (6) MP* 定理
 (8) $A \Rightarrow (A \rightarrow B)$ MP* 定理
 (9) $\circ(A \Rightarrow A \rightarrow B)$ (8) 引理 5[1]
 (10) $\circ A \Rightarrow \circ(A \rightarrow B)$ (9) [2]
 (11) $\circ B \Rightarrow \circ(A \rightarrow B)$ 同(10)
 (12) $\circ A \rightarrow \circ B$ 假设
 (13) $\circ(A \rightarrow B)$ (6) (4) (5) 及 ($\rightarrow$)

引理 7 对任何公式 A, B , 若 $A \vdash B \rightarrow \circ A$, 那么 $A \vdash \Box B$.

证明

- (1) A 假设
 (2) $B \rightarrow \circ A$ (1) 前提
 (3) $\circ A$ (2) ($\rightarrow$.)
 (4) $\Box A$ (1) (3) 引理 5[4]
 (5) B (2) ($\rightarrow$.)
 (6) $\Box B$ (1) (5) (4) 规则 及引理 6[1]

引理 8 在 MTL 中有 $\vdash A \triangleright B \Leftrightarrow B \quad (A \quad \circ (A \triangleright B))$.

证明 由 (R_6) 、 (R_7) 及 MP^* 定理立得.

引理 9 在 MTL 中,若 $(1) \vdash C < B$; $(2) \vdash C < B \quad (A \quad \circ C)$. 则
 $C \vdash A \triangleright B$ 且 $\nexists (A \triangleright B) \vdash \nexists C$.

证明

- | | | |
|-----|--|-------------------|
| (1) | $\nexists (A \triangleright B)$ | 假设 |
| (2) | $(\nexists B \quad \nexists A) \quad (\nexists B \quad \circ \nexists (A \triangleright B))$ | (1) (R_7) |
| (3) | $(\nexists B \quad \nexists A) \quad (\nexists B \quad \circ \nexists C) < \nexists C$ | 前提(2) 及 MP^* 定理 |
| (4) | $\nexists B \quad \nexists A$ | |
| (5) | $\nexists C$ | (3) (4) MP^* 定理 |
| (6) | $\nexists B \quad \circ \nexists (A \triangleright B)$ | |
| (7) | $\square \nexists B$ | (1) (6) 引理 7 |
| (8) | $\nexists C$ | (7) 前提(1) 及引理 2 |
| (9) | $\nexists C$ | |

又

- | | | |
|-----|--|----------------------------------|
| (1) | $B \quad (A \quad \circ (A \triangleright B)) \Rightarrow A \triangleright B$ | (R_6) |
| (2) | $\nexists (A \triangleright B) \Rightarrow \nexists B \quad (\nexists A \quad \circ \nexists (A \triangleright B))$ | (1) MP^* 定理及 (R_4) 、 (R_5) |
| (3) | $C \quad \nexists (A \triangleright B) \Rightarrow \nexists B \quad \circ C \quad \circ \nexists (A \triangleright B)$ | (2) 前提(2) 及 MP^* 定理 |
| (4) | $C \quad \nexists (A \triangleright B) \Rightarrow \nexists B \quad \circ (C \quad \nexists (A \triangleright B))$ | (3) 引理 6[3] |
| (5) | $C \quad \nexists (A \triangleright B) \Rightarrow \square \nexists B$ | (4) 引理 7 |
| (6) | $C \quad \nexists (A \triangleright B) \Rightarrow \nexists \square \nexists B$ | 前提(1)、 MP^* 定理及引理 6 |
| (7) | $\nexists (C \quad \nexists (A \triangleright B))$ | (5) (6) MP^* 定理 |
| (8) | $C \Rightarrow A \triangleright B$ | (7) MP^* 定理 |

引理 10 在 MTL 中,若 $\vdash B \quad (A \quad \circ C) < C$, 则 $A \triangleright B \vdash C$ 且 $\nexists C \vdash \nexists (A \triangleright B)$.

证明 类似于引理 9.

定理 1 $A \triangleright B$ 是方程组
$$\begin{cases} \vdash C < B \\ \vdash B A \quad (A \quad \circ C) \Leftrightarrow C \end{cases}$$

4 MTL 系统的语义解释

设 $F = \langle W, \sigma \rangle$ 为一个结构, 其中

$\sigma: \omega \rightarrow W$ (ω 为自然数集); $W = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots\}$ 为状态集(可能世界集) W 的一种枚举, 其中 σ_i 与 σ_j 之间的可达关系 R 为线序, 即 $(\sigma_i, \sigma_j) \in R$ 当且仅当 $i \leq j$ [4].

MTL 系统的语义解释由下列四元组 $\langle W, \sigma, V, T \rangle$ 构成, $T = \{0, 1, 2\}$ 为真值集; V 为映射 $\Phi \times W \rightarrow T$ (Φ 为原子命题集), 对任意的 σ_i 及公式 A , $V(A, \sigma_i)$ 表示 A 在状态 σ_i 下的取值, 它可递归定义如下:

$$(1) \quad V(p_n, \sigma_i) = \begin{cases} T, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$(2) \quad V(\neg A, \sigma_i) = \begin{cases} 0, & V(A, \sigma_i) = 2, \\ 1, & V(A, \sigma_i) = 1, \\ 2, & V(A, \sigma_i) = 0. \end{cases}$$

$$V(A, \sigma_i) = 1,$$

其它.

$$(4) \quad V(\Box A, \sigma_i) = \begin{cases} 2, \\ 0, \\ 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} B \\ \exists j \geq i, V(A, \sigma_j) = 2, \\ \text{对 } \forall j \geq i, V(A, \sigma_j) = 0, \\ \text{其它.} \end{matrix}$$

$$(6) \quad V(\circ A, \sigma_i) = \begin{cases} 2, \\ 1, \\ 0, \end{cases}$$

$$(8) \quad V(A < B, \sigma_i) = \begin{cases} 2, & V(A, \sigma_i) = 0 \text{ 或 } V(B, \sigma_i) = 2 \\ & \text{或 } V(A, \sigma_i) = 1 \text{ 且 } V(B, \sigma_i) = 1, \\ 0, & V(A, \sigma_i) = 2 \text{ 且 } V(B, \sigma_i) = 0, \\ 1, & \text{其它.} \end{cases}$$

证明 对任意的四元组 W, σ, V, T 一一验证 MTL 中的所有公理及推理规则即得所证. 现选证: $(T_1) \vdash \Box A < \circ A$

要证 $\models \Box A < \circ A$ 当且仅当 对任意的四元组 W, σ, V, T 及任意的状态 σ_i , 都有 $V(\Box A < \circ A, \sigma_i) = 2$. 不失一般性取状态 σ_0 进行证明.

(1) 若 $V(\Box A, \sigma_0) = 2$, 则对任意的 $j \geq 0$, 有 $V(A, \sigma_j) = 2$, 当然有 $V(A, \sigma_1) = 2$, 即 $V(\circ A, \sigma_0) = 2$.

(2) 若 $V(\sim \Box A, \sigma_0) = 2$, 则 $V(\Box \neg \exists A \sim A, \sigma_0) = 2$, 故有 $V(\Box \neg \exists A, \sigma_0) = 2$, 从而对任意的 $j \geq 0$, $V(\neg \exists A, \sigma_j) \neq 2$, 即 对任意的 $j \geq 0$, $V(A, \sigma_j) = 2$, 或 $V(\sim A, \sigma_j) = 2$, 故有 $V(\circ A, \sigma_0) = 2$, 或 $V(\sim \circ A, \sigma_0) = 2$, 从而 $V(\circ A \sim \circ A, \sigma_0) = 2$. 综合 (1), (2) 有 $V(\Box A < \circ A, \sigma_0) = 2$, 即 $\models \Box A < \circ A$.

5 中介时序逻辑系统与经典时序逻辑系统的关系

引理 11 在 MTL 中有 $\neg \circ A \vdash \circ \neg A$.

证明

- | | | |
|-----|-----------------------------------|-----------------------------|
| (1) | $\neg \circ A$ | 假设 |
| (2) | $\sim \circ A \quad \neg \circ A$ | (1) MP^* 定理 |
| (3) | $\circ(\sim A \quad \neg A)$ | (2) $(R_4), (R_5)$ 及引理 6[4] |
| (4) | $\circ \neg A$ | (3) 定理 3 |

又

- | | | |
|-----|-----------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\circ \neg A$ | 假设 |
| (2) | $\circ(\neg A \sim A)$ | (1) 定理 3 |
| (3) | $\circ \neg A \quad \circ \sim A$ | (2) 引理 6[4] |
| (4) | $\neg \circ A$ | (3) $(R_4), (R_5)$ 及 MP^* 定理 |

周知, 经典二值命题逻辑 P 是 MP^* 的子系统^[5], 又在 MTL 中有:

- (1) $\vdash \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$.
- (2) $\vdash \neg \Box A \Leftarrow \neg A$.
- (3) $\vdash \circ(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\circ A \Rightarrow \circ B)$.
- (4) $\vdash \neg \circ A \Leftarrow \circ \neg A$.
- (5) $\vdash \Box(A \Rightarrow \circ A) \Rightarrow (A \Rightarrow \Box A)$.

因此, 可得如下结论: 经典时序命题逻辑系统^[1]是 MTL 系统的子系统.

6 结束语

本文构造了一种基于中介逻辑的时序逻辑系统, 该系统直观性较强, 推理规则也不很复杂, 它不仅具有许多类似于经典时序逻辑系统的性质, 而且具有许多自身独特的性质. 由于基于中介逻辑的逻辑程序设计语言已经产生, 因此本文构造的 MTL 系统可望在逻辑程序设计方

面具有一定的应用前景和进一步深化研究的价值.

参 考 文 献

- [1] Z. Manna and A. Paucli, *Verification of concurrent programs: a temporal proof system*, Stanford University Report, No, STAN - CS - 83 - 967, 1983.
- [2] Zhu Wujia and Xiao Xian, *An extension of the propositional calculus system of medium logic* (), (), Journal of Nanjing University (Natural Sciences Edition), 26:4 (1990), 564 - 576, 27:2 (1991), 209 - 221.
- [3] 宫宁生、张东摩、朱梧楨, 中介自动推理的理论及其实现() ——一类基于中介逻辑的模态逻辑系统, 模式识别与人工智能, 1(1995), 195 - 202.
- [4] R. Goldblatt, *Logic of time and computation*, CSL I Lecture Notes, 7(1987), 36 - 45.
- [5] 朱梧楨、肖奚安, 答《中介数学没有包括经典数学》一文及其它, 数学研究与评论, 1(1989), 149 - 151.

A System of Temporal Logic Based on Medium Logic

Shi Qingsheng^{1,2} Zhang Dongmo^{1,3} Zhu Wujia^{1,3}

(¹Department of Computer Science and Engineering, NUAA Nanjing, 210016)

(²Department of Basic Sciences, NACEI Nanjing, 210009)

(³State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210008)

Abstract

This paper presents a system of MTL (Medium Temporal Logic) based on the medium logic. Emphasis is given on the formal system of MTL, by discussing its semantics and proving the soundness: Finally, we compare the system of MTL with that of classical temporal propositional logic, pointing out that it is a subsystem of MTL.

Keywords medium logic, temporal logic, proposition logic, medium temporal logic.