

## 一 类 广 义 KdV 方 程 的 孤 立 波 精 确 解\*

孙 方 裕

(杭州大学数学系, 杭州 310028)

**摘 要** 本文给出求一类广义 KdV 方程的孤立波精确解的方法.

**关键词** 广义 KdV 方程, 非线性, 孤立波精确解.

**分类号** AMS(1991) 35Q/ CCL O175

广义 KdV 方程由于有实际的背景日益受到重视和广泛的研究, 如描述一维非线性晶体传播波的方程<sup>[1]</sup>

$$u_t + (\alpha u^2 + ru^3)_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

以及广义 KdV 方程

$$u_t + u_{xxx} + (u^3)_x + \beta u_x = \alpha u_{xx} \quad (2)$$

的初值问题<sup>[2]</sup>, 等等. 本文研究一类更一般的广义 KdV 方程

$$u_t + f(u)_x = \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} \quad (3)$$

的精确孤立波解, 其中  $f(u) = b_0 u^n + b_1 u^{2n-1} (n > 1)$ .

设  $u(x, t) = u(s)$ ,  $s = x - ct$ , 代入(3), 得  $-cu_s + f'(u)u_s = \alpha u_{ss} + \beta u_{sss}$ , 由此可得

$$-cu + f(u) = \alpha u_s + \beta u_{ss}, \quad (4)$$

于是, 若  $u$  为(4)的解, 那么  $u(x - ct)$  必为(3)的孤立波解. 令

$$u_s = au + bu^n \quad (a \cdot b < 0), \quad (5)$$

把它代入(4)式得  $[\alpha + \beta(a + nbu^{n-1})](au + bu^n) = f(u) - cu$ , 由此得

$$\begin{cases} n\beta b^2 = b_1, \\ [(n+1)\alpha\beta + \alpha]b = b_0, \\ \alpha a + \beta a^2 = -c. \end{cases} \quad o$$

经

其中  $c_0$  为任意常数,它是方程(3)的孤立波精确解,并且

$$u(x, t) \big|_{t \rightarrow +\infty} = 0, u(x, t) \big|_{t \rightarrow -\infty} = \left(-\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (a_i > 0),$$

$$u(x, t) \big|_{t \rightarrow -\infty} = 0, u(x, t) \big|_{t \rightarrow +\infty} = \left(-\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (a_i < 0).$$

### 例 1 广义 KdV 方程

$$u_t + (\alpha u^2 + ru^3)_x + \beta u_{xxx} = 0, (\beta r < 0, \beta \alpha < 0), \quad (8)$$

由  $f(u) = \alpha u^2 + ru^3$ , 得  $n=2, b_0=\alpha, b_1=r$ .

$$\text{由(6)式得 } b_i = (-1)^i \sqrt{\frac{r}{2\beta}}, a_i = \frac{2}{\alpha + 3a_i\beta}, c_i = -(\alpha a_i + \beta a_i^2) \quad (i=1, 2).$$

因此,得方程(8)的孤立波解

$$u_i = d_i \operatorname{tgh} [a_i(x - c_i t - c_0) + d_i], d_i = -\frac{a_i}{2b_i}, (i=1, 2), c_0 \text{ 为任意常数}.$$

### 例 2 广义 KdV 方程

$$u_t + 3u^2 u_x - 5u^4 u_x = u_{xx} - u_{xxx}, \quad (9)$$

由  $f(u) = u^3 - u^5$ , 得  $n=3, b_0=1, b_1=-1, \alpha=1, \beta=-1$ . 由(6)式得

$$a_i = \frac{1}{4} + (-1)^{i-1} \sqrt{3}, b_i = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{12}, c_i = \frac{45}{16} - \frac{1}{2} (-1)^{i-1} \sqrt{3}, (i=1, 2),$$

因此,方程(9)有孤立波解

$$u_i = [d_i \operatorname{tgh} a_i |x - c_i t - c_0| + d_i]^{\frac{1}{2}}, d_i = -\frac{a_i}{2b_i}, (i=1, 2), c_0 \text{ 为任意常数}.$$

## 参 考 文 献

- [1] 戴世强,若干强非线性问题的近似解析解,中国科学, A 辑, 2(1990), 153 - 162.
- [2] 张领海,广义非线性 Korteweg-de Vries 方程初值问题解的衰变估计,数学年刊, 16:1(1995), 22 - 31.
- [3] R. Kentnagle and E. B. Saff, *Fundamentals of differential equations*, Benjamin/Cummings Menlo Park, CA, 1986.

## The Isolated Wave Solution of a Class of Generalized KdV Equations

Sun Fangyu

(Dept of Math., Hangzhou University, Hangzhou 310028)

### Abstract

In this paper, we develop the method of solving the exact isolated wave solution of generalized KdV Equations.

**Keywords** generalized KdV equations, nonlinear, the exact isolated wave solution.