满足右零化子特殊升链条件的环*

张力宏 王文举
(四平师范学院数学系, 吉林136000) (首都经贸大学经济信息管理系, 北京100026)

摘 要 本文讨论了满足右零化子特殊升链条件的环的性质以及与左、右完备环, QF-环的关系; 给出了满足右零化子特殊升链条件的环中素理想是完全素理想的条件, 从而给出了 Goldie 定理的一个应用.

关键词 右零化子特殊升链条件, 右完备环, 完全素理想
分类号 AMS(1991) 16P/CCL O153

1 引 言

对满足链条件的环的研究已相当广泛, 对环赋予各种不同的链条件就会得到各种不同的结果.

本文中的环 R 表示有单位元的结合环. 设 $S\subset R$ 是 R 的子集, 则 $r(S)=\{x\in R\mid Sx=0\}$是 R 的右理想, 称为 S 的右零化子. 如果对 R 中任意的子集序列 $S_1, S_2, \cdots$, 其右零化子升链

$$r(S_1)\subseteq r(S_2S_1)\subseteq\cdots\subseteq r(S_n\cdots S_1)\subseteq\cdots$$

在有限步终止, 即存在自然数 n, 使得 $r(S_nS_{n-1}\cdots S_1)=r(S_{n+1}S_n\cdots S_1)=\cdots$, 则称 R 满足右零化子特殊升链条件. 当 $S=\{a\}$时, 记 $r(S)=r(a)$. 若 $r(a)=0$, 则称 a 是 R 中的右正则元. 类似地可以定义左正则元和正则元.

满足右零化子特殊升链条件的环类很多, 如 Artin 环, Noether 环, QF-环, 满足零化子升链条件的环等都属此范畴. 但满足右零化子特殊升链条件的环未必是右完备环, 右完备环也不一定是 QF-环. 关于左(右)完备环何时是 QF-环的研究已有许多, Osofsky[1]和 Kato[2]证明了右完备的, 且是左、右自内射环是 QF-环. 对此有人提出(Faith C. [3,4])是否可将左、右自内射环的条件换成(右)左自内射环. [4]中给出了当 R 是左、右完备的右自内射环时成为 QF-环的条件. [5]中定理5.8表明 R 是 QF-环当且仅当 R 是满足零化子升链条件的右自内射环, 此时显然 R 是右完备环. 对此本文证明了: 使 $J(R)$ 是有限生成的右完备环 R, 若满足右零化子特殊升链条件, 则 R 一定是左完备环; R 是 QF-环当且仅当 R 是满足右零化子特殊升链的右自内射环, 且 Jacobson 根 $J(R)$ 是有限生成的.

此外, Posner[7]和 Ferrero 等[8]提出一个问题: 环 R 在满足零化子极大条件下其素理想是否是完全素理想(completely prime ideal[9])? 该问题目前仍没有完全解决. Posner 给出了素根

* 1995年12月4日收到

$P(R)$是完全素理想的条件. Ferrero 等指出 Posner 的证明有不足之处, 并且也给出了素根是全素的条件. 对此本文给出了更一般的结果: 若 R 满足右零化子特殊升链条件, 右 Goldie 维数为1, 则当 R 是半质环时, 其商环是除环. 这可以看作是 Goldie 定理的一个应用, 从而推广了 Ferrero 等的结果.

2 右完备环是 QF-环的条件

引理2.1 设 R 满足右零化子特殊升链条件, 则对 R 中任意的元素列 $x_1, x_2, \cdots$ 及任意的 k, 有 n 使得 $r(x_{n+k}\cdots x_{n+1}) \cap x_n\cdots x_1R = 0$.

证明 由条件知有 n, 使得 $r(x_n\cdots x_1) = r(x_{n+1}x_n\cdots x_1) = \cdots$, 任取 $y \in r(x_{n+k}\cdots x_{n+1}) \cap x_n\cdots x_1R$, 则有 $r_1 \in R$, 使得 $y = x_n\cdots x_1r_1$ 且 $0 = x_{n+k}\cdots x_{n+1}y = x_{n+k}\cdots x_{n+1}x_n\cdots x_1r_1$, 因此 $r_1 \in r(x_{n+k}\cdots x_1) = r(x_n\cdots x_1)$, 即 $y = x_n\cdots x_1r_1 = 0$. □

同样的方法可证得下面的

引理2.2 设 $a \in R$, M 是左 R-模, 则 $r_M(a^n) = r_M(a^{n+1}) = \cdots$ 当且仅当 $r_M(a^n) \cap a^nM = 0$, 其中 $r_M(a) = \{x \in M \mid ax = 0\}$.

设 N 是 R 的子集, 称 N 是右 T-幂零的, 如果对 N 中的任意元素列 $x_1, x_2, \cdots$, 有自然数 k, 使得 $x_kx_{k-1}\cdots x_1 = 0$.

引理2.3 设 R 满足右零化子特殊升链条件, 若 I 是 R 的有限生成的非幂零右理想, 则 I 不是右 T-幂零的.

证明 设 I 的生成元是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 则一定有 $0 \neq a_kR$ 不是幂零的. 根据已知有 n 存在, 使 $r(((a_kR)^n) = r((a_kR)^{n+1}) = \cdots$, 设 $L = (a_kR)^n$, 则 $r(L) = r(L^2)$, $L^2 \neq 0$. 所以存在 $0 \neq x_1 \in L$, 使 $Lx_1 \neq 0$, 得 $x_1 \notin r(L) = r(L^2)$, 从而 $L^2x_1 \neq 0$, 因此又存在 $0 \neq x_2 \in L$ 使 $Lx_2x_1 \neq 0$, 得 $x_2x_1 \notin r(L) = r(L^2)$, 这又有 $L^2x_2x_1 \neq 0$, 从而又有 $0 \neq x_3 \in L$ 使 $Lx_3x_2x_1 \neq 0$, $\cdots$, 依次下去知 L 中有元素列 $x_1, x_2, \cdots$, 使对任意的 k, $x_k\cdots x_1 \neq 0$, 故 I 不是右 T-幂零的. □

今知, 半质环没有非零的幂零单侧理想, 与之比较有:

推论2.4 设 R 是满足右零化子特殊升链条件的半质环, 则 R 没有非零的右 T 幂零单侧理想.

证明 设 I 是 R 的非零的右 T 幂零右理想, 取 $0 \neq a \in I$, 则 $0 \neq aR \subseteq I$ 是 R 的右理想. 当然是右 T-幂零的. 由引理2.3, aR 是幂零的, 这与 R 是半质环矛盾. □

定理2.5 设 R 是满足右零化子特殊升链条件的右完备环, $J(R)$ 是有限生成的, 则 R 一定是左完备环.

证明 由 R 是右完备环知 $J(R)$ 是右 T-幂零的, $R/J(R)$ 是半单环. 根据已知及引理2.3, $J(R)$ 是幂零的, 这说明 R 亦是左完备环. □

定理2.6 R 是 QF-环当且仅当 R 是满足右零化子特殊升链条件的右自内射环, 且 $J(R)$ 是有限生成的.

证明 必要性显然.

充分性 由于 R 的任一主左理想降链都有 $Ra_1 \supseteq Ra_2a_1 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n\cdots a_1 \supseteq \cdots$ 形式, 因此有

升链

$$r(Ra_1)\subseteq r(Ra_2a_1)\subseteq\cdots\subseteq r(Ra_n\cdots a_1)\subseteq\cdots.$$

由已知存在 n, 使得 $r(Ra_n\cdots a_n)=r(Ra_{n+1}a_n\cdots a_1)=\cdots$, 但 R 是右自内射环, 所以有

$$Ra_n\cdots a_1=l(r(Ra_n\cdots a_1))=l(r(Ra_{n+1}\cdots a_1))=Ra_{n+1}\cdots a_1.$$

这说明 R 是右完备环, 由定理2.5知 R 又是左完备环. 设 $J(R)$ 的生成元集合是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$$r(J(R))=r(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

根据[4]的推论知 R 是QF-环. □

3 素理想是全素理想的条件

引理3.1 设 R 满足右零化子特殊升链条件, 则 R 的奇异右理想 $Z(R)$ 是右 T-幂零的.

证明 若 $Z(R)$ 中存在元素列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 使对任意的 n, $x_n\cdots x_1\neq 0$, 则 $x_n\cdots x_1R\neq 0$. 但由已知及引理2.1有 $r(x_{n+1})\cap x_n\cdots x_1R=0$, 这与 $r(x_{n+1})$ 在 R 中是本质的矛盾, 所以 $Z(R)$ 是右 T-幂零的. □

引理3.2 设 R 满足右零化子特殊升链条件, 则 $Z(R)\subseteq P(R)$, 其中 $P(R)$ 表示 R 的素根.

证明 任取 $0\neq a\in Z(R)$, 则 $aR\subseteq Z(R)$ 是 R 的有限生成右理想. 由引理3.1, $Z(R)$ 是右 T-幂零的, 所以 aR 也是. 由引理2.3, aR 是幂零的, 从而 $aR\subseteq P(R)$. 由于 R 有单位元, 得 $a\in P(R)$, 故 $Z(R)\subseteq P(R)$. □

引理3.3 设 R 是满足右零化子特殊升链条件的半质环, I 是 R 的诣零右理想, 则 I 中存在元素列 $a_1, a_2, \cdots$, 使 $a_1R+a_2R+\cdots$ 是直和.

证明 由推论2.4, I 不是右 T-幂零的, 所以 I 中存在元素列 $x_1, x_2, \cdots$, 使对任意的 m 有 $x_n\cdots x_1\neq 0$. 另外由已知存在 n_1 使 $r(x_{n_1}\cdots x_1)=r(x_{n_1+1}x_{n_1}\cdots x_1)=\cdots\neq R$. 又由于 I 是诣零的, 所以存在 l_1 使 $x_{n_1+1}^{l_1}=0$, 而 $x_{n_1+1}^{l_1-1}\neq 0$, 这说明 $x_{n_1+1}^{l_1-1}\in r(x_{n_1+1})$, 因此有

$$I_1=r(x_{n_1+1})\cap I\neq 0,$$

I_1 是诣零的, 但不是右 T-幂零的, 所以 I_1 中存在元素列 $y_1, y_2, \cdots$, 使对任意的 m, 有 $y_m\cdots y_1\neq 0$. 由已知存在 n_2, 使得 $r(y_{n_2}\cdots y_1)=r(y_{n_2+1}y_{n_2}\cdots y_2)=\cdots\neq R$. 任取 $x\in x_{n_1}\cdots x_1R\cap y_{n_2}\cdots y_1R$, 有 $r_1, r_2\in R$. 使

$$x=x_{n_1}\cdots x_1r_1=y_{n_2}\cdots y_1r_2, x_{n_1+1}x=x_{n_1+1}x_{n_1}\cdots x_1r_1=x_{n_1+1}y_{n_2}\cdots y_1r_2=0,$$

从而 $r_1\in r(x_{n_1+1}x_{n_1}\cdots x_1)=r(x_{n_1}\cdots x_1)$, 得 $x=0$. 这说明 $x_{n_1}\cdots x_1R+y_{n_2}\cdots y_1R$ 是直和.

又由于 I_1 是诣零的, 所以存在 l_2 使 $y_{n_2+1}^{l_2}=0$ 而 $y_{n_2+1}^{l_2-1}\neq 0$, 得 $y_{n_2+1}^{l_2-1}\in r(y_{n_2+1})\cap I_1=I_2\neq 0$, I_2 是诣零的但不是右 T-幂零的. 所以 I_2 中存在元素列 $z_1, z_2, \cdots$, 使对任意的 m 有 $z_m\cdots z_1\neq 0$. 根据已知有 n_3, 使得 $r(z_{n_3}\cdots z_1)=r(z_{n_3+1}z_{n_3}\cdots z_1)=\cdots\neq R$. 任取 $x\in(x_{n_1}\cdots x_1R+y_{n_2}\cdots y_1R)\cap z_{n_3}\cdots z_1R$. 有

$$x=x_{n_1}\cdots x_1r_1+y_{n_2}\cdots y_1r_2=z_{n_3}\cdots z_1r_3,$$
$$x_{n_1+1}x=x_{n_1+1}x_{n_1}\cdots x_1r_1+x_{n_1+1}y_{n_2}\cdots y_1r_2=x_{n_1+1}z_{n_3}\cdots z_1r_3=0,$$

但又有 $x_{n_1+1}y_{n_2}\cdots y_1r_2=0$, 所以 $x_{n_1+1}x_{n_1}\cdots x_1r_1=0$. 得

$$r_1\in r(x_{n_1+1}x_{n_1}\cdots x_1)=r(x_{n_1}\cdots x_1), x_{n_1}\cdots x_1r_1=0,$$

即 $x = y_{n_2}\cdots y_1 r_2 = z_{n_3}\cdots z_1 r_3$. 从而又有 $y_{n_2+1}x = y_{n_2+1}y_{n_2}\cdots y_1 r_2 = y_{n_2+1}z_{n_3}\cdots z_1 r_3 = 0$, 得

$$r_2\in r(y_{n_2+1}y_{n_2}\cdots y_1) = r(y_{n_2}\cdots y_1),$$

即 $x = 0$. 因此和 $x_{n_1}\cdots x_1R + y_{n_2}\cdots y_1R + z_{n_3}\cdots z_1R$ 是直和.

又由 I_2 是诣零的, 所以存在 l_3, 使得 $z_{n_3+1}^{l_3} = 0, z_{n_3+1}^{l_3-1}\neq 0$, 得 $I_3 = r(z_{n_3+1})\cap I_2\neq 0$ 是诣零的, 依次下去…, 即得结论. □

推论3.4 设 R 是满足右零化子特殊升链条件的半质环, 且右 Goldie 维数有限, 则 R 没有非零的诣零单侧理想.

与推论2.4比较, 推论3.4的结果更进了一步.

引理3.5 设 R 是满足右零化子特殊升链条件的右非奇异环, 右 Goldie 维数有限, 则 c 是 R 的右正则元当且仅当 cR 是 R 的本质右理想.

证明 由于 R 右非奇异, 所以当 cR 是 R 的本质右理想时有 $c^2\neq 0$, 因此根据[10]p3引理1.1存在 R 的本质右理想 L 使 $0\neq bL\subseteq cR$, $0\neq b\in R$. 从而有 $0\neq cbL\subseteq c^2R$, $cbL\subseteq cbR$, 即对 cR 的任意非零子模 cbR, 有 $0\neq cbL\subset c^2R\cap cbR$, 说明 c^2R 是 cR 的本质子模, 因而在 R 中是本质的, 依次下去…, 得 c^nR 在 R 中是本质的, $n = 1, 2, \cdots$. 根据已知存在 n 使 $r(c^n) = r(c^{n+1}) = \cdots$, 而引理2.2得证了 $r(c^n)\cap c^nR = 0$. 所以 $r(c^n) = 0$, 得出 $r(c) = 0$. c 是右正则元.

反之, 由[10]p11引理1.11可得. □

注 由于 $Z(R) = \{x\in R \mid 对某个本质右理想 K 有 xK = 0\}$, 所以如果 c 是右正则元, 则在引理3.5条件下有 $l(c) = l(cR)\subseteq Z(R) = 0$, 说明 c 是正则元.

引理3.6 设 R 是满足右零化子特殊升链条件的半质环, 右 Goldie 维数有限, 则 R 的本质右理想中必含有 R 的正则元.

证明 设 I 是 R 的本质右理想, 由引理3.2, R 是非奇异的, 因此由引理3.5后的注只须证明 I 中含有右正则元即可. 由推论3.4, I 不是诣零的, 所以 I 中有非幂零元 a_1. 又由已知存在 n_1 使 $r(a_1^{n_1}) = r(a_1^{n_1+1}) = \cdots$, 若 $r(a_1^{n_1}) = 0$, 则 $a_1^{n_1}$ 即为所求. 否则有 $r(a_1^{n_1})\cap I\neq 0$, 再由推论3.4, $r(a_1^{n_1})\cap I$ 中含有非幂零元 a_2, 根据已知存在 n_2 使 $r(a_2^{n_2}) = r(a_2^{n_2+1}) = \cdots$. 任取 $x\in a_1^{n_1}R\cap a_2^{n_2}R$, 则 $x = a_1^{n_1}r_1 = a_2^{n_2}r_2$ 且 $a_1^{n_1}x = a_1^{2n_1}r_1 = a_1^{n_1}a_2^{n_2}r_2 = 0$, 得 $r_1\in r(a_1^{2n_1}) = r(a_1^{n_1})$, 即 $x = 0$, 这说明 $a_1^{n_1}R + a_2^{n_2}R$ 是直和. 另外显然有 $r(a_1^{n_1})\cap r(a_2^{n_2})\subseteq r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2})$. 任取 $y\in r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2})$, 有 $a_1^{n_1}y = -a_2^{n_2}y\in a_1^{n_1}R\cap a_2^{n_2}R = 0$. 因此 $y\in r(a_1^{n_1})\cap r(a_2^{n_2})$, 得 $r(a_1^{n_1})\cap r(a_2^{n_2}) = r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2})$. 若 $r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2}) = 0$, 则 $a_1^{n_1} + a_2^{n_2}$ 即为所求. 否则 $r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2})\cap I\neq 0$ 且含有非幂零元 a_3. 由已知存在 n_3 使 $r(a_3^{n_3}) = r(a_3^{n_3+1}) = \cdots$. 任取 $x\in(a_1^{n_1}R + a_2^{n_2}R)\cap a_3^{n_3}R$. 则 $x = a_1^{n_1}r_1 + a_2^{n_2}r_2 = a_3^{n_3}r_3$. 由 a_3 的取法可知

$$a_1^{n_1}x = a_1^{2n_1}r_1 + a_1^{n_1}a_2^{n_2}r_2 = a_1^{n_1}a_3^{n_3}r_3 = 0,$$

但 $a_2\in r(a_1^{n_1})\cap I$, 所以 $a_1^{n_1}a_2^{n_2}r_2 = 0$ 得 $a_1^{2n_1}r_1 = 0$, 即 $r_1\in r(a_1^{2n_1}) = \cdots = r(a_1^{n_1})$. 这表明 $x = a_2^{n_2}r_2 = a_3^{n_3}r_3$, 得 $a_2^{n_2}x = a_2^{2n_2}r_2 = a_2^{n_2}a_3^{n_3}r_3 = 0$, $r_2\in r(a_2^{2n_2}) = \cdots = r(a_2^{n_2})$, 即 $x = 0$. 所以和 $a_1^{n_1}R + a_2^{n_2}R + a_3^{n_3}R$ 是直和. 再任取 $y\in r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2} + a_3^{n_3})$, 有 $a_1^{n_1}y + a_2^{n_2}y = -a_3^{n_3}y\in(a_1^{n_1}R + a_2^{n_2}R)\cap a_3^{n_3}R = 0$, 得 $a_1^{n_1}y = a_2^{n_2}y = a_3^{n_3}y = 0$, 即 $y\in r(a_1^{n_1})\cap r(a_2^{n_2})\cap r(a_3^{n_3})$. 所以有 $r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2} + a_3^{n_3}) = r(a_1^{n_1})\cap r(a_2^{n_2})\cap r(a_3^{n_3})$. 若 $r(a_1^{n_1} + a_2^{n_2} + a_3^{n_3}) = 0$, 则 $a_1^{n_1} + a_2^{n_2} + a_3^{n_3}$ 即为所求. 否则依次做下去…, 由于 R 的右

Goldie 维数有限, 所以一定存在m 使$r(a_1^{n_1}+\cdots+a_m^{n_m})=0$, 这就说明$a_1^{n_1}+\cdots+a_m^{n_m}$是$R$ 的右正则元, 且在I中. □

定理3.7 设R 是右 Goldie 维数有限的半质环, 则R 满足右零化子特殊升链条件当且仅当R 满足左零化子升链条件.

证明 设$a, c\in R$, c 是正则元, 注意到此时R 是右非奇异的, 因此cR 是R 的本质右理想. 由[10]p3引理1.1, $L=\{r\in R \mid ar\in cR\}$亦是$R$ 的本质右理想. 由引理3.6, L 中含有正则元d, 即$ad\in cR$, 因此存在$b\in R$ 使$ad=cb$, 这说明R 一定有右商环Q.

设$I_1\supset I_2\supset\cdots$是$Q$ 的严格右理想降链, 则有R 的右理想降链

$$I_1\cap R\supseteq I_2\cap R\supseteq\cdots\supseteq I_n\cap R\supseteq\cdots.$$

若存在n 使$I_n\cap R$ 在$I_{n-1}\cap R$ 中是本质的, 则对任意的$x\in I_{n-1}\cap R$, 由[10]p3引理1.1存在R 的本质右理想K, 使$xK\subseteq I_{n-1}\cap R$. 由引理3.6, K 含有R 的正则元c 使$xc\in I_n\cap R$. 但又有$x=xcc^{-1}\in(I_n\cap R)Q=I_n$ 得$I_{n-1}\cap R\subseteq I_n$, $I_{n-1}=(I_{n-1}\cap R)Q\subseteq I_{n-1}Q=I_n$, 这与$I_{n-1}\supset I_n$矛盾. 说明对每个$i$, $I_i\cap R$ 在$I_{i-1}\cap R$ 中都不是本质的, 即对每个i 存在R 的非零右理想$J_i\subseteq I_i\cap R$, 使得$J_i\cap(I_{i+1}\cap R)=0$. 从而得到R 的右理想直和$J_1+J_2+\cdots+J_n+\cdots$, 这与$R$ 的右 Goldie 维数有限矛盾, 所以Q 是 Artin 环.

下面证Q 的幂零根为零. 由推论3.4, R 没有非零的幂零单侧理想, 因此若I 是Q 的幂零右理想, 则必有$I\cap R=0$. 从而任取$x\in I$, 一定存在$a, c\in R$, c 是正则元, 使$x=ac^{-1}$, $xc=a\in I\cap R$, 即$x=0$, $I=0$, 所以Q 的幂零根为零, Q 是 Artin 半单环. 由 Goldie 定理知R 满足右零化子升链条件.

反之是显然的. □

上述结论给出了 Goldie 定理的另一等价形式, 因此扩大了 Goldie 定理适用范围.

定理3.8 设R 是满足右零化子特殊升链条件的半质环, 且右 Goldie 维数为1, 则R 是无零因子环.

证明 设$0\neq a\in R$, 若$r(a)\neq 0$, 由于R 的右 Goldie 维数为1, 所以对R 的任意右理想$I\neq 0$, 有$r(a)\cap I\neq 0$, 这说明$r(a)$是R 的本质右理想, 由引理3.6, $r(a)$中有R 的正则元x, 由$0=ax$ 有$a\in l(x)=0$, 这与a 的取法矛盾. 因此$r(a)=0$, 即a 是右正则元, 再由引理3.5后的注知a 是正则元, 即R 中无零因子. □

注 显然此时R 有商环Q 且Q 为除环. 因此作为应用, 定理3.8给出了 Goldie 定理的更进一步的结果, 即 Goldie 维数等于1时的情形.

定理3.9 设R 满足右零化子极大条件, P 是R 的非本质素理想使R/P 的右 Goldie 维数是1, 则P 是完全素理想.

证明 由于P 不是本质的, 所以存在R 的非零右理想I 使$P\cap I=0$, 从而$IP\subseteq I\cap P=0$, 得$P\subseteq r(I)$. 另外有$Ir(I)=0$ 得$I\subseteq P$ 或$r(I)\subseteq P$. 但已知$P\cap I=0$, 所以$r(I)\subseteq P$ 即$P=r(I)$.

根据[11]p164定理6, 质环R/P 满足右零化子极大条件, 所以定理3.8保证了R/P 是无零因子环, 即P 是完全素理想.

注 如果R 是D-环, 并且有一个包含在$J(R)$中的完全素理想, 则R/P 亦然. 另外由[8]中命题3的证明知此时R/P 的右 Goldie 维数是1, 所以本文定理3.9推广了[8]的结果.

参 考 文 献

1 Osofsky B. *A generalization of QF-ring*. J. Algebra, 1966, **4**: 373- 387
2 Kato T. *Self-injective ring*. Tôhoku Math. J., 1967, **19**: 485- 495
3 Faith C. *When self injective rings are QF-rings, A report on a problem*. Lentre Recerca Mathematica Institute d'Estudies Catalans, 1990.
4 Clark J and Hagnh D V. *A note on prefect seft-injective ring*. Quart. J. Math. Oxford (2), 1994, **45** (177): 13- 17
5 **薛伯英等. 基础环论. 长春: 吉林大学出版社**, 1994.
6 Jain S K. *Weakly Projective and weakly injective modules*. Canada J. Math., 1994, **46**(5): 971- 981
7 Posner E C. *Left valuation rings and simple radical rings*. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **107**: 458- 465
8 Ferrero M and Törner G. *Rings with annihilator chain conditions and right distributive rings*. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, **119**(2): 401- 405
9 Goodearl K R. *Von Neumann Regular Rings*. Monographs and Studies in Math., 1979, **4**
10 Chatters A W and Hajarnavis C R. *Rings with chain conditions*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston. London. Melbour, 1980.
11 **熊全淹. 环构造. 武汉: 湖北教育出版社**, 1983.

Rings Satisfying a Special Ascending Chain Condition for Right Annihilators

Zhang Lihong
(Dept. of Math. Siping Teachers' College, Jilin 136000)

Wang Wenju
(Capital University of Economics and Business, Beijing 100026)

Abstract

In this paper some properties of the rings satisfying a special ascending chain condition for right annihilators, and some relations to left, ringt perfect rings and QF-righs are discussed; As an application of Goldie theorem, a condition is given for a prime ideal is a completely prime ideal in this class of rings.

Keywords ascending chain condition for right annihilators, right perfect ring, completely prime ideal.