第18卷第4期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 4
1998年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1998

cu-条件的Morita不变性*

陈 焕 良
(湖南师范大学数学系, 长沙410006)

摘 要 本文证明了rc-条件下的cu-条件是Morita不变的.

关键词 rc-条件, cu-条件, Morita等价.
分类号 AMS(1991) 15E50/CCL O153

1973年, E. G. Evans证明了M可以从直和项中消去当且仅当End$M$满足稳定秩1条件, 1976年, K. R. Goodearl把上述问题推广到了模的幂消去. 在[4]中, 进一步把幂消去问题推广到了幂比较, 即环R称为满足cu-条件, 如果$ax+b=1_R$, $a, x, b\in R$, 则存在$n>0, Q\in M_n(R)$使得aI_n+bQ在$M_n(R)$上左可逆或右可逆. 在本文中, 证明了cu-条件在rc-条件下是Morita不变的. 文中所有环都是带单位元1的结合环, 模都是酉模.

环R称为满足rc-条件, 如果$ax+b=1_R$, $a, x, b\in R$, 则存在中心幂等元e使得有$y, z\in R$满足$\bar{a}+\bar{b}\bar{y}$在$R/\mathrm{Ann}(e)$中右逆, $\bar{a}+\bar{b}\bar{z}$在$R/\mathrm{Ann}(1-e)$中左逆, 首先, 有:

命题1 下列两款等价:

(1) R满足rc-条件.

(2) 若$M=A_1\oplus B_1=A_2\oplus B_2, A_1\cong R\cong A_2$, 则存在中心幂等元$e$使得

$$M=C\oplus D\oplus B_1=C\oplus E\oplus B_2,$$

且

$$De=0, E(1-e)=0.$$

证明 (2)⇒(1) 显然

$$Me=Ce\oplus B_1e=Ce\oplus Ee\oplus B_2e,$$
$$M(1-e)=C(1-e)\oplus D(1-e)\oplus B_1(1-e)$$
$$=C(1-e)\oplus B_2(1-e),$$

类似于文[3]命题10即知R满足rc-条件.

(1)⇒(2) 类似于[3]命题10知, 存在中心幂等元$e\in R$使得

$$M(1-e)=C_1\oplus D\oplus B_1(1-e)=C_1\oplus B_2(1-e),$$

且

$$Me=C_2\oplus B_1e=C_2\oplus E\oplus B_2e,$$

显然有

---

* 1995年11月27日收到. 1998年1月6日收到修改稿. 湖南省自然科学基金资助项目.

$$De=0, E(1-e)=0,$$

且

$$M=M(1-e)\oplus Me=C\oplus D\oplus B_1=C\oplus E\oplus B_2,$$

其中 $C=C_1\oplus C_2$, 故命题得证.

命题2　设 R 满足 cu-条件且 $0\neq e=e^2\in R$, 则 eRe 满足 cu-条件.

证明　假设 $ax+b=e, a, x, b\in eRe$, 易验证

$$(a+1-e)(x+1-e)+b=ax+b-e+1=1,$$

因为 R 满足 cu-条件, 故存在 $n>0, Q\in M_n(R)$ 使得 $(a+1-e)I_n+bQ$ 为 n 阶左可逆或右可逆矩阵.

假设存在 $P\in M_n(R)$ 使得 $P((a+1-e)I_n+bQ)=I_n$, 则

$$eP((a+1-e)I_n+bQ)e=eI_n,$$

故

$$eP(aI_n+bQe)=eI_n.$$

由于 $a, b\in eRe$, 从而 $a=eae, b=ebe$, 所以

$$eP(eae\cdot eI_ne+ebe\cdot eQe)=eI_n,$$

即 $(ePe)(a\cdot eI_ne+b(eQe))=eI_ne$, 故存在 $eQe\in M_n(eRe)$ 使得 $a(eI_ne)+b(eQe)$ 在 $M_n(eRe)$ 中左可逆, 类似地, 可以证得 $a(eI_ne)+b(eQe)$ 在 $M_n(eRe)$ 中右可逆, 故命题得证.

为了便于应用, 给出 cu-条件的模形式.

命题3　设 A 为右 R-模, $E=\mathrm{End}_RA$, 则下列两款等价:

(1)　E 满足 cu-条件.

(2)　设 $M=A_1\oplus B_1=A_2\oplus B_2$ 且 $A_1\cong A\cong A_2$, 则存在 $n>0, C\leq M^n$ 使得

$$M^n=C\oplus D\oplus B_1^n=C\oplus E\oplus B_2^n,$$

且 $D=0$ 或 $E=0$.

证明　根据[4]命题3.1知 E 满足 cu-条件当且仅当如果 $M=A_1\oplus B_1=A_2\oplus B_2, A_1\cong A\cong A_2$, 则存在 $n>0, C\leq M^n$ 使得 $M^n=C\oplus D\oplus B_1^n=C\oplus B_2^n$ 或者 $M^n=C\oplus B_1^n=C\oplus E\oplus B_2^n$, 故命题得证.

命题4　设 R 满足 rc-条件, 若 R 满足 cu-条件, 则 $M_n(R)$ 满足 cu-条件.

证明　设 $M=A_1\oplus B_1=A_2\oplus B_2, A_1\cong R^n\cong A_2$, 假设 $n=1$, 显然存在 $m\geq 1, D_1\leq M^m$ 使得

$$M^m=D_1\oplus E_1\oplus B_1^m=D_1\oplus F_1\oplus B_2^m,$$

且 $E_1=0$ 或 $F_1=0$.

假设当 $n\leq k$ 时, 存在 $s\geq 1, D_2\geq M^s$ 使得

$$M^s=D_2\oplus E_2\oplus B_1^s=D_2\oplus F_2\oplus B_2^s,$$

且 $E_2=0$ 或 $F_2=0$.

现令 $n=k+1(k\geq 1)$, 则 $\varphi: R\oplus R^k\cong A_1$, 从而,

$$A_1=\varphi(R\oplus R^k)=\varphi(R)\oplus\varphi(R^k)=F_1\oplus F_2,$$

这里 $F_1=\varphi(R)\cong R, F_2=\varphi(R^k)\cong R^k$. 类似地有 $A_2=G_1\oplus G_2$, 这里 $G_1\cong R, G_2\cong R^k$.

因为

$$M = A_1 \oplus B_1 = F_1 \oplus (F_2 \oplus B_1) = G_1 \oplus (G_2 \oplus B_2) = A_2 \oplus B_2,$$

这里 $F_1 \cong R \cong G_1$. 因为 R 满足 rc-条件, 根据命题1知存在中心幂等元 $e \in R$ 使得 $M = D \oplus E_1 \oplus (F_2 \oplus B_1) = D \oplus E_2 \oplus (G_2 \oplus B_2)$ 且 $E_1 e = 0$, $E_2(1-e) = 0$, 显然有 $D \oplus E_1 \cong F_1 \cong R \cong G_1 \cong D \oplus E_2$, 从而, $De \cong Re$, $D(1-e) \cong R(1-e)$, 故

$$D = De \oplus D(1-e) \cong Re \oplus R(1-e) = R,$$

从而

$$R \oplus E_1 \cong D \oplus E_1 \cong F_1 \cong R,$$

类似地有 $R \oplus E_2 \cong R$, 故有

$$M = (E_1 \oplus F_2) \oplus (D \oplus B_1) = (E_2 \oplus G_2) \oplus (D \oplus B_2),$$

且 $E_1 \oplus F_2 \cong R^k \cong E_2 \oplus G_2$, 根据归纳假设知存在 $t \geq 1$, $D_2 \leq M^t$ 使得

$$M^t = D_2 \oplus H_1 \oplus (D \oplus B_1)^t = D_2 \oplus H_2 \oplus (D \oplus B_2)^t,$$

且 $H_1 = 0$ 或 $H_2 = 0$, 故有

$$M^t = (D^t \oplus D_2) \oplus H_1 \oplus B_1^t = (D^t \oplus D_2) \oplus H_2 \oplus B_2^t,$$

从而由归纳原理以及命题3知 $End_R R^n$ 满足 cu-条件, 即 $M_n(R)$ 满足 cu-条件.

定理5 设 R 满足 rc-条件, 则下列两款等价:

(1) R 满足 cu-条件;

(2) 对任何 $S \approx R$, S 满足 cu-条件.

证明 (2) ⇒ (1) 因为 R Morita 等价于 R, 故 R 满足 cu-条件.

(1) ⇒ (2) 对任何 $S \approx R$, 存在 $0 \neq e = e^2 \in M_n(R)$, 使得 $S \cong eM_n(R)e$, 由命题4知 $M_n(R)$ 满足 cu-条件, 又根据命题2得 S 满足 cu-条件.

右 R-模 M 称为满足幂比较条件, 如果 $\mathrm{End}_R M$ 满足 cu-条件, 则有

命题6 设 $\mathrm{End}_R M \approx \mathrm{End}_R N$ 满足 rc-条件, 则 M 满足幂比较条件当且仅当 N 满足幂比较条件.

证明 假设 M 满足幂比较条件, 则 $\mathrm{End}_R M$ 满足 cu-条件, 由定理5知 $\mathrm{End}_R N$ 满足 cu-条件, 即 N 满足幂比较条件. 类似地可以证明, 若 N 满足幂比较条件, 则 M 也满足幂比较条件.

命题7 设 R 满足 rc-条件, 则下列两款等价:

(1) R 满足 cu-条件;

(2) 对任何有限生成投射右 R-模 P, P 满足幂比较条件.

证明 (2) ⇒ (1) 因为 R 作为右 R-模满足幂比较条件, 故 R 满足 cu-条件.

(1) ⇒ (2) 对任何有限生成投射右 R-模 P, 有幂等变换 $\bar{e}: R^n \to R^n$, 使得 $P \cong R^n \bar{e}$. 故有 $\mathrm{End}_R P \cong \mathrm{End}_R(R^n \bar{e}) \cong \bar{e}(\mathrm{End}_R R^n)\bar{e} \cong eM_n(R)e$, 其中 e 为 $\bar{e}$ 对应的幂等矩阵; 从而根据命题4和命题2知 $\mathrm{End}_R P$ 满足 cu-条件, 即 P 满足幂比较条件.

注8 在另文中将证明正则环上的 rc-条件是 Morita 不变的, 因而命题6的条件是容易满足的, 作为推论, 还有:

推论9 设 R 为正则、右自内射环, 则下列两款等价:

(1) R 满足 cu-条件;

(2) 对任何有限生成投射右 R-模 P, P 满足幂比较条件.

参 考 文 献

1 Evans E G. *Krull-Schmidt and cancellation over local rings*. Pacific J. Math., 1973, **46**: 115- 121

2 Goodearl K R. *Power-cancellation of groups and modules*. Pacific J. Math., 1976, **64**: 387- 411

3 Chen H. *Related Comparability over Regular Rings*. Algebra Colloq., 1996, **3**: 277- 282

4 **陈焕艮、佟文廷. 正则环上的幂问题. 数学学报**, 1997, **40**: 815- 822

5 Menal P. *Cancellation modules over regular rings*. Lecture Notes in Mathematics, 1328, Springer-Verlag, 1986.

6 Warfield Jr R B. *Genus and cancellation for groups with finite commutator subgroup*. J. Pure Applied Algebra, 1975, **6**: 125- 132

Morita Invariant Property of cu- Conditions

Chen Huanyin

(Dept. of Math., Hunan Normal University, Changsha 410006)

Abstract

In this paper, we prove that cu- conditions over rings are Morita invariant under rc-conditions. As an application, we consider power comparability of modules over associative rings.

Keywords rc-condition, cu-condition, Morita equivalence.