第18卷第4期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 4
1998年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1998

空间 $l_\infty(X_n)$ 中的弱紧性*

林 贵 华

(大连理工大学应用数学系, 大连116024)

摘 要 本文首先得到了以 $l_\infty(X_n)$ 为值域的有界线性算子为弱紧算子的一个充要条件和一个充分条件, 讨论了 $l_\infty(X_n)$ 中的弱收敛, 然后给出了 $l_\infty(X_n)$ 中弱紧性的几种等价刻画

关键词 $l_\infty(X_n)$, 弱紧算子, 弱紧性

分类号 AMS(1991) 46B/CCL O177.2

1 引 言

设 $\{X_n\}$ 是一列Banach 空间, $1\leq p<\infty$. 记

$$l_p(X_n)=\{x=(x_n): \forall n, x_n\in X_n \text{ 且 } \|x\|=(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty\},$$

$$l_\infty(X_n)=\{x=(x_n): \forall n, x_n\in X_n \text{ 且 } \|x\|=\sup_n\|x_n\|<\infty\},$$

则 $l_1^*(X_n)\cong l_\infty(X_n^*)$.

关于空间 $l_p(X_n)\ (1\leq p<\infty)$ 中的弱紧性, 已经得到了很好的结果, 而空间 $l_\infty(X_n)$ 中的弱紧性(包括其中的弱收敛性) 尚未解决, 本文将讨论这个问题

文中所讨论的空间均为Banach 空间, 以 B_X 表示空间 X 的闭单位球, $\overline{\mathrm{aco}}(A)$ 表示集合 A 的闭绝对凸包, $L(X, Y)$ 表示由 X 到 Y 的有界线性算子组成的空间, 用 P_k 表示由 $l_\infty(X_n)$ 到 X_k 的投影算子, $e^k=(0,\cdots,0,\underset{\text{第}k\text{项}}{1},0,\cdots)$, 当 $x\in l_\infty(X_n)$ 时其坐标表示视为 (x_n).

2 主要结果

引理 1[1] $T\in L(X, Y)$ 为弱紧算子当且仅当其共轭算子 T^* 是弱紧算子.

定理 1 设 $T\in L(Y, l_\infty(X_n))$, $T_n=P_nT\ (\forall n)$. 则 T 为弱紧算子的充要条件是: 存在 Y^* 的弱紧子集 K 使 $T_n^*(B_{X_n^*})\subset K\ (\forall n)$.

证明 (1) 设 T 为弱紧算子, 则必存在自反Banach 空间 Z 及 $S_1\in L(Y, Z)$, $S_2\in L(Z, l_\infty(X_n))$, 使 $T=S_2S_1$[2]. 于是 $T_n=P_nS_2S_1\ (\forall n)$.

* 1996年8月27日收到

不妨设 $\|S_2\| \leq 1$.

令 $K = S_1^*(B_{Z^*})$, 则 K 为 Y^* 的弱紧子集. 注意到 $\|S_2^* P_n^*\| \leq \|S_2\| \cdot \|P_n\| = \|S_2\| \leq 1 (\forall n)$, 故

$$T_n^*(B_{X_n^*}) = S_1^*(S_2^* P_n^* B_{X_n^*}) \subset K, \ \forall n.$$

(2) 设 K 为 Y^* 的弱紧子集且使 $T_n^*(B_{X_n^*}) \subset K (\forall n)$.

记 $K_1 = \overline{\mathrm{aco}}(K)$, 则由 Krein 定理[3], K_1 仍为 Y^* 的弱紧子集. 定义 $S \in L(l_1(X_n^*), Y^*)$ 为

$$S(x^*) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(x_n^*), \forall x^* = (x_n^*) \in l_1(X_n^*).$$

任取 $x^* = (x_n^*) \in B_{l_1(X_n^*)}$, 并记 $\lambda_n = \|x_n^*\|$, $y_n^* = \begin{cases} \dfrac{x_n^*}{\|x_n^*\|} & x_n^* \neq 0, \\ 0 & x_n^* = 0 \end{cases}$ $(\forall n)$, 则 $T_n^*(y_n^*) \in K_1 (\forall n)$, 由于 K_1 是绝对凸集且 $\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \leq 1 (\forall m)$, 故

$$\sum_{n=1}^{m} T_n^*(x_n^*) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n^*(y_n^*) \in K_1, \ \forall m.$$

由 K_1 的弱紧性及凸性, 知 K_1 为闭集, 故

$$S(x^*) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(x_n^*) = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} T_n^*(x_n^*) \in K_1.$$

因此 $S(B_{l_1(X_n^*)}) \subset K_1$, 故 S 为弱紧算子. 由引理 1, $S^* \in L(Y^{**}, l_\infty(X_n^{**}))$ 仍为弱紧算子.

容易验证, $T = S^*|_Y$, 故 T 也是弱紧算子. 证毕.

完全仿照定理 1 中充分性的证明就可得到

定理 2 设 $T \in L(Y^*, l_\infty(X_n))$, $T_n = P_n T (\forall n)$. 若存在 Y 的弱紧子集 K 使 $T_n^*(B_{X_n^*}) \subset K (\forall n)$, 则 T 必为弱紧算子.

下面来讨论 $l_\infty(X_n)$ 中的弱收敛性, 先介绍两个引理:

引理 2 设 $T \in L(l_1, Y)$ 且 $y^k = Te^k (\forall k)$.

(a) $\{y^k\}$ 弱收敛于 0;

(b) $T^* \in L(Y^*, c_0)$;

(c) T 为弱紧的.

则 (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 设 $y^k \xrightarrow{w} 0$, 任取 $f \in Y^*$, 则 $f(y^k) \to 0$ 且 $T^* f \in l_\infty$. 设 $T^* f = (\xi_k)$, 则有

$$\xi_k = T^* f(e^k) = f(Te^k) = f(y^k) \to 0.$$

故 $T^* f \in c_0$. 这说明 $T^* \in L(Y^*, c_0)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) 设 $T^* \in L(Y^*, c_0)$, $f \in Y^*$, 并设 $T^* f = (\xi_k)$, 则有 $\xi_k = f(y^k) (\forall k)$. 因 $T^* f \in c_0$, 故 $f(y^k) \to 0$, 由 f 的任意性知 $y^k \xrightarrow{w} 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) 设 (b) 成立, 由于 $T^*: Y^* \to l_\infty$ 为 w^* - w^* 连续的, 故 $T^*(B_{Y^*})$ 在 l_∞ 中为 w^* 紧的, 又因 $T^*(B_{Y^*}) \subset c_0$, 故 $T^*(B_{Y^*})$ 在 c_0 中为 w 紧的, 即 T^* 为弱紧算子, 由引理 1, T 为弱

紧算子. 证毕.

引理 3 空间 c_0 中的有界序列 $\{x^k\}$ 弱收敛于 0 的充要条件为 $x_n^k \to 0 (k \to \infty) (\forall n)$.

这是众所周知的结论.

定理 3 空间 $l_\infty(X_n)$ 中的有界序列 $\{x^k\}$ 弱收敛于 0 的充要条件为

(i) 对每个 n 均有 $x_n^k \xrightarrow{w} 0$;

(ii) 任取 $\{x_n^*\}$, 其中 $x_n^* \in B_{X_n^*} (\forall n)$, 均存在 $\{n_i\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}^* (x_{n_i}^k) = 0$.

证明 定义 $T \in L(l_1, l_\infty(X_n))$ 为

$$T(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x^k, \forall a = (\xi_k) \in l_1.$$

则 $Te^k = x^k (\forall k)$, 令 $T_n = P_n T (\forall n)$.

(1) 设 $x^k \xrightarrow{w} 0$, 则由 P_n 的连续性, (i) 成立.

由引理 2, $T^* \in L(l_\infty^*(X_n), c_0)$ 且 T 为弱紧的, 从而由定理 1, 存在 c_0 的弱紧子集 K, 使 $T_n^*(B_{X_n^*}) \subset K (\forall n)$. 任取 $\{x_n^*\}$, 其中 $x_n^* \in B_{X_n^*} (\forall n)$, 则 $T_n^*(x_n^*) \in K (\forall n)$. 设 $T_n^*(x_n^*) = (\xi_k)$, 则

$$x_n^*(x_n^k) = x_n^*(P_n x^k) = x_n^*(T_n e^k) = T_n^* x_n^*(e^k) = \xi_k, \quad \forall k.$$

故 $(x_n^*(x_n^k))_{k=1}^{\infty} = T_n^*(x_n^*) \in K (\forall n)$. 而 $K \subset c_0$ 为弱紧集, 故存在子列 $\{n_i\}$, 使 $T_{n_i}^*(x_{n_i}^*) \xrightarrow{w} a$, 其中 $a = (\eta_k) \in c_0$. 于是由引理 3, $x_{n_i}^*(x_{n_i}^k) \to \eta_k (i \to \infty) (\forall k)$. 故

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{i\to\infty} x_{n_i}^*(x_{n_i}^k) = \lim_{k\to\infty} \eta_k = 0.$$

(2) 设 (i), (ii) 均成立. 令 $K = \{(x_n^*(x_n^k))_{k=1}^{\infty}: x_n^* \in B_{X_n^*}, n = 1, 2, \cdots\}$. 由条件 (i), $K \subset c_0$. 由条件 (ii) 及 $B_{X_n^*}$ 的 w^* 紧性 $(\forall n)$, 易证 K 为相对弱紧的, 从 (1) 的证明知, 若 $x_n^* \in B_{X_n^*}$, 则 $T_n^*(x_n^*) = (x_n^*(x_n^k))_{k=1}^{\infty}$, 故 $T_n^*(B_{X_n^*}) \subset K (\forall n)$. 由定理 2 知 T 为弱紧算子.

对 $\{x^k\}$ 的任一子列 $\{x^{k_i}\}$, 因 $x^{k_i} = Te^{k_i} (\forall i)$. 故存在其子列 $\{y^i\}$ 弱收敛, 设极限为 x, 由条件 (i), $x = 0$. 即 $\{x^k\}$ 的任一子列均存在弱 0 子列, 故 $x^k \xrightarrow{w} 0$. 证毕.

现在来讨论 $l_\infty(X_n)$ 中的弱紧性, 为此先介绍两个引理.

引理 4 在赋范空间 X 中, 若 $x^k \xrightarrow{w} x$, 则存在 $\{y^k\}$ 使 $y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots) (\forall k)$ 且 $y^k \to x$.

证明 若 $u_n \xrightarrow{w} u$, 则必存在 $\{v_n\}$ 使 $v_n \in \mathrm{co}(u_1, u_2, \cdots) (\forall n)$ 且 $v_n \to u$[4].

应用上述结论, 若 $x^k \xrightarrow{w} x$, 则存在 $y^1 \in \mathrm{co}(x^1, x^2, \cdots)$ 使 $\|y^1 - x\| < 1$, 又因 $\{x^k\}_{k=2}^{\infty}$ 弱收敛于 x, 故必存在 $y^2 \in \mathrm{co}(x^2, x^3, \cdots)$ 使 $\|y^2 - x\| < \frac{1}{2}$.

这样继续下去就得到所求的 $\{y^k\}$. 证毕.

引理 5[5] 集合 $A \subset Y$ 为相对弱紧的充要条件为: 任取 $\{x^k\} \subset A$, 均存在 $\{y^k\}$, 使 $y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots) (\forall k)$ 且 $\{y^k\}$ 弱收敛.

定理 4 设 K 为 $l_\infty(X_n)$ 中的有界集, 则下列命题等价:

(a) K 为相对弱紧的;

(b) 任取 $\{x^k\} \subset K$, 均存在子列 $\{y^k\}$ 及 $y = (y_n) \in l_\infty(X_n)$, 使 (i) 任意 n 均有 $y_n^k \xrightarrow{w} y_n$,

(ii) 任意$\{x_n^*\}$, 其中$x_n^* \in B_{X_n^*}\ (\forall n)$, 均存在$\{n_i\}$使

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty} x_{n_i}^*(y_{n_i}^k - y_{n_i}) = 0;$$

(c) 任取$\{x^k\} \subset K$, 均存在$\{y^k\}$及$y = (y_n) \in l_\infty(X_n)$, $y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots)$使(i) 任意$n$均有$y_n^k \to y_n$; (ii) 任意$\{x_n^*\}$, 其中$x_n^* \in B_{X_n^*}\ (\forall n)$, 均存在$\{n_i\}$使

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty} x_{n_i}^*(y_{n_i}^k - y_{n_i}) = 0;$$

(d) 任取$\{x^k\} \subset K$, 均存在$\{y^k\}$及$y = (y_n) \in l_\infty(X_n)$, $y^k \in \mathrm{co}(x^k, x^{k+1}, \cdots)\ (\forall k)$使(i) 任意$n$均有$y_n^k \xrightarrow{w} y_n$, (ii) 任意$\{x_n^*\}$, 其中$x_n^* \in B_{X_n^*}\ (\forall n)$, 均存在$\{n_i\}$使

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty} x_{n_i}^*(y_{n_i}^k - y_{n_i}) = 0.$$

证明 (a)$\Leftrightarrow$(b) 由定理3立即得到

(a)$\Rightarrow$(c) 由定理3及引理4即得.

(c)$\Rightarrow$(d) 显然成立

(d)$\Rightarrow$(a) 由定理3及引理5即得. 证毕

参 考 文 献

1 Conway J B. *A course in functional analysis*. New York: Springer-Verlag, 1985.

2 Davis W J Figiel T Johnson W B and Pelczynski A. *Factoring weakly compact operators*. J. Functional Analysis, 1974, **17**: 311- 327

3 Holmes R B. *Geometric functional analysis and its applications*. New York: Springer-Verlag, 1975.

4 Diestel J. *Sequences and series in Banach spaces*. New York: Springer-Verlag, 1983.

5 Ülger A. *Weak compactness in $L^1(\mu, X)$*. Proc. Amer. Math. Soc., 1991, **113**: 143- 149

6 Schlüchtermann G. *Weak compactness in $L_\infty(\mu, X)$*. J. Functional Analysis, 1994, **125**: 379- 388

Weak Compactness in $l_\infty(X_n)$

Lin Guihua

(Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, 116024)

Abstract

In this paper, a equivalent condition and a sufficient condition of which operators with $l_\infty(X_n)$ as range are weak compact are obtained first, and the weak convergence in $l_\infty(X_n)$ is discussed, then several characterizations of weak compactness in $l_\infty(X_n)$ are given.

Keywords $l_\infty(X_n)$, weak compact operators, weak compactness