凸集上投影算子的一个单调性质*

戚厚铎
(中国科学院计算数学与科学工程计算研究所, 北京100080)

摘　要　本文证明了投影算子的一个新的单调性质, 并简要讨论了与其它单调性质的关系.

关键词　单调性, 投影算子, 凸集
分类号　AMS(1991) 90C33/CCL O221

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭凸集, 记 $P(x)$ 为到 Ω 上的投影算子, 即

$$P(x)=\arg\min\{\|z-x\|: z\in\Omega\}.$$

投影算子 P 的性质在与投影梯度法有关的算法中起着至关重要的作用, 参见[1-4]. 首先介绍一些已知的性质, 下述性质的前三个可见[2]中引理2.1, 性质(d)可见[2]中引理2.2, (e)可见[4]中引理3, (f)是(a)的一个简单推论.

引理1　(a)　$\langle P(x)-x, z-P(x)\rangle\geq 0,\ \forall x\in\mathbf{R}^n, z\in\Omega$;

(b)　$\langle P(y)-P(x), y-x\rangle\geq 0,\ \forall x, y\in\mathbf{R}^n$, 若 $P(x)\neq P(y)$, 则严格不等式成立;

(c)　$\|P(y)-P(x)\|\leq\|y-x\|,\ \forall x, y\in\mathbf{R}^n$;

(d)　给定 $x\in\Omega$ 及 $d\in\mathbf{R}^n$, 函数 $\Psi(\alpha)=\dfrac{\|x-P(x-\alpha d)\|}{\alpha}$, $\alpha>0$ 是关于 α 的不增函数;

(e)　给定 $x\in\Omega$ 及 $d\in\mathbf{R}^n$, 函数 $\Gamma(\alpha)=\dfrac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\alpha}$, $\alpha>0$ 是关于 α 的不增函数;

(f)　给定 $x\in\Omega$, $d\in\mathbf{R}^n$ 及 $\alpha>0$, 有 $\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle\geq\dfrac{\|x-P(x-\alpha d)\|^2}{\alpha}$.

现在证明算子 P 的另外一个单调性质.

定理2　给定 $x\in\Omega$ 及 $d\in\mathbf{R}^n$, 函数 $\Phi(\alpha)=\dfrac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\|x-P(x-\alpha d)\|}$, $\alpha>0$ 是关于 α 的不增函数.

证明　(反证法)　设存在两个正常数 α, β 且 $\beta>\alpha$ 使得

$$\frac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\|x-P(x-\alpha d)\|}<\frac{\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|}. \tag{1}$$

从关系(1)得到矛盾, 从而证明定理的结论. 令

$$z(\lambda)=P(x-\beta d)+\lambda(x-P(x-\beta d)),\quad \lambda\in\mathbf{R}$$

及

$$\overline{I}=\{z(\lambda): \lambda\in[0, 1]\}.$$

由于 $x\in\Omega$, $P(x-\beta d)\in\Omega$ 及 Ω 为凸集, $\overline{I}\subseteq\Omega$. 令

* 1996年1月30日收到. 1998年5月28日收到修改稿

$$\varphi(\lambda)=\|(x-\alpha d)-z(\lambda)\|^2,\ \lambda\in\mathbf{R}$$

$\varphi(\lambda)$ 为 λ 的凸函数, $\varphi(\lambda)$ 的导数为

$$\varphi'(\lambda)=2\langle x-\alpha d-z(\lambda), x-P(x-\beta d)\rangle.$$

设 λ^* 满足 $\varphi'(\lambda^*)=0$, 得到

$$\lambda^*=\frac{\langle x-\alpha d-P(x-\beta d), x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|^2}=1-\frac{\alpha\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|^2}. \tag{2}$$

从引理1(f)知

$$\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle\geq\frac{\|x-P(x-\beta d)\|^2}{\beta}.$$

将上式代入(2)有 $\lambda^*\leq 1-\dfrac{\alpha}{\beta}<1$.

考虑两种情况

情况1 $\lambda^*\geq 0$.

由于 $\varphi(\lambda)$ 为凸函数且 $\lambda^*\in[0,1]$, 所以 $\varphi(\lambda^*)\leq\varphi(\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$. 令

$$\begin{aligned}z^*&=P(x-\beta d)+\lambda^*(x-P(x-\beta d))\\&=P(x-\beta d)+\left(1-\alpha\frac{\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|^2}\right)(x-P(x-\beta d)),\end{aligned}$$

显然 $z^*\in\Omega$, 现在证明

$$\|x-\alpha d-z^*\|<\|x-\alpha d-P(x-\alpha d)\|. \tag{3}$$

上式就与 $P(x-\alpha d)$ 的定义矛盾. 事实上,

$$\begin{aligned}\|x-\alpha d-z^*\|^2&=\left\|x-\alpha d-x+\frac{\alpha\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|^2}(x-P(x-\beta d))\right\|^2\\&=\alpha^2\|d\|^2-\alpha^2\left(\frac{\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|}\right)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\|x-\alpha d-P(x-\alpha d)\|^2-\|x-\alpha d-z^*\|^2\\&=\|x-P(x-\alpha d)\|^2-2\alpha\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle+\alpha^2\left(\frac{\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|}\right)^2\\&\overset{(1)}{>}\|x-P(x-\alpha d)\|^2-2\alpha\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle+\alpha^2\left(\frac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\|x-P(x-\alpha d)\|}\right)^2\\&=\left\|x-P(x-\alpha d)-\alpha\frac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\|x-P(x-\alpha d)\|^2}(x-P(x-\alpha d))\right\|^2\geq 0.\end{aligned}$$

这就证明了(3)式

情形2 $\lambda^*<0$, 即 $1-\dfrac{\alpha\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle}{\|x-P(x-\beta d)\|^2}<0$. 从而

$$\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle>\frac{\|x-P(x-\beta d)\|^2}{\alpha}. \tag{4}$$

现在证明

$$\|x-\alpha d-P(x-\beta d)\|<\|x-\alpha d-P(x-\alpha d)\|. \tag{5}$$

由(1)及(4)知

$$\begin{aligned}&\|x-\alpha d-P(x-\alpha d)\|^2-\|x-\alpha d-P(x-\beta d)\|^2\\&=\|x-P(x-\alpha d)\|^2-2d\langle d, x-P(x-2d)\rangle-\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \|x-P(x-\beta d)\|^2+2\alpha\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle \\
> & \|x-P(x-\alpha d)\|^2-2\alpha \frac{\|x-P(x-\alpha d)\|}{\|x-P(x-\beta d)\|}\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle- \\
& \|x-P(x-\beta d)\|^2+2\alpha\langle d, x-P(x-\beta d)\rangle \\
> & \|x-P(x-\alpha d)\|^2+2\alpha\left(1-\frac{\|x-P(x-\alpha d)\|}{\|x-P(x-\beta d)\|}\right)\frac{\|x-P(x-\beta d)\|^2}{\alpha}- \\
& \|x-P(x-\beta d)\| \\
= & \|x-P(x-\alpha d)\|^2-2\|x-P(x-\alpha d)\|\|x-P(x-\beta d)\|+ \\
& \|x-P(x-\beta d)\|^2 \\
= & (\|x-P(x-\alpha d)\|-\|x-P(x-\beta d)\|)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

这就证明了(5)式, 从而与 $P(x-\alpha d)$ 的定义矛盾. 综合情形1及2就证明了结论

最后指出定理要求 $\|x-P(x-\alpha d)\| \neq 0, \alpha > 0$, 如果它等于零, 定理就成为最简单的情形. 即投影方法就不必考虑这些单调性质. 注意到

$$
\frac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\alpha}=\frac{\|x-P(x-\alpha d)\|}{\alpha}\frac{\langle d, x-P(x-\alpha d)\rangle}{\|x-P(x-\alpha d)\|},
$$

由引理1(d)及定理2就得到 $\Gamma(\alpha)$ 是关于 α 的不增函数

感谢曲阜师范大学王长珏教授对本文的指导.

参 考 文 献

1 Bertsekas D P. *Projected newton methods for optimization problems with simple constraints.* SIAM J. Contr. Option, 1982, **20**: 221- 246

2 Burke J V and Moré J J. *Projected gradient methods for linearly constrained problems.* Math. Programming, 1987, **39**: 93- 116

3 Dunn J C. *On the convergence of projected gradient processes to singular critical points.* JOTA, 1987, **55**: 203- 216

4 Wang C Y and Zhao F. *Optimal value function is mathematical programming and convergence for gradient projection method.* System Sciences and Mathematical Sciences, 1994, **7**: 261- 269

A Monotonic Property of the Project Operator onto a Closed Convex Set

Qi Huoduo

(Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

This paper proves a new monotonic property for monotone operater, and studies the relationship between this property and other monotonic properties

Keywords monotone property, projection operator, convex set.