第18卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 4
1998年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 1998

q 超几何级数 ${}_2\Phi_0[a, b; z]$ 的两个基本恒等式及其一些应用*

魏鸿增　　张谊宾
(河北师范大学数学系, 石家庄050091)

摘　要　本文由有限域上交错矩阵方程 $XK_{2\nu}X' = 0$ 的解数公式得到 q 超几何级数 ${}_2\Phi_0$ 的一个基本恒等式, 并且用它能直接把一些特殊矩阵的这类方程的解数由函数 ${}_2\Phi_0$ 表出. 另外还用 ${}_2\Phi_0$ 的一个恒等式得出 F_q 上 m 阶特殊矩阵的个数.

关键词　q 超几何级数, 矩阵方程, 特殊矩阵.
分类号　AMS(1991) 05E15/CCL O157.1

1　引　言

熟知二项系数 $\binom{m}{k}$ 的 q 模拟是高斯二项系数

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q^{m-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}. \tag{1}$$

对于超几何级数 ${}_sF_t\left[\begin{matrix} a_1, \cdots, a_s \\ b_1, \cdots, b_t \end{matrix}; z\right]$ 也有相应的 q 模拟, 即 q 超几何级数

$${}_s\Phi_t\left[\begin{matrix} a_1, \cdots, a_s \\ b_1, \cdots, b_t \end{matrix}; z\right] = \sum_{r=0}^{r} \frac{(a_1)_r\cdots(a_s)_r z^r}{(b_1)_r\cdots(b_t)_r(q)_r}, \tag{2}$$

这里 $(a)_r = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{r-1})$, 且 $(a)_0 = 1$. 因此(2)是 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots b_t, q$ 与 z 的函数, 且依定义

$${}_2\Phi_0[a, b; z] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r}{(q)_r} z^r. \tag{3}$$

由分拆及子空间计数等问题引入的高斯二项系数除了简化表达外, 还具有一系列约简计算的性质. 对于 q 超几何级数来说同样也有约简公式和简化计算的作用. 因此一些计数公式考虑它能否用 q 超几何级数表达常常是重要的.

设 F_q 是 q 元有限域, F_q 上两个 n 阶矩阵 A, B 说是同步的, 如果存在非奇异矩阵 T 使得 $TAT' = B$. 把 F_q 上适合方程 $XAX' = O^{(m)}$ 的 $m \times n$ 矩阵解 X 的个数记作 $n_{m\times n}(A, O)$, 易知若 A 同步于 B, 则 $n_{m\times n}(A, 0) = n_{m\times n}(B, 0)$. 因此将总用矩阵的同步标准形决定的矩阵方程来讨论解数公式. 本文首先由交错矩阵方程的解数公式证明 ${}_2\Phi_0$ 的一个恒等式, 然后利用该式直接推出本文所得到的一些特殊矩阵方程解数公式的 q 超几何级数表示. 另外还应用恒等式 ${}_2\Phi_0$

* 1995年11月23日收到. 1998年5月20日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目、河北省教委科研项目.

$[c, q^{-n}; q] = c^n$ 给出有限域 F_q 上 m 阶特殊矩阵个数的证明. 本文的术语、符号多采自[1].

2　从交错矩阵方程解数得到 ${}_2\Phi_0$ 的恒等式

设 q 是任意素数 p 的方幂, 则有限域 F_q 上任何 m 阶交错矩阵由[1]定理3.1知必同步于

$$\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & \\ -I^{(\upsilon)} & 0 & \\ & & O^{(m-2\upsilon)} \end{pmatrix},$$

这里 $0 \le 2\upsilon \le m$, υ 称为指数. 显然交错矩阵的秩为偶数, 且 2υ 阶非奇异交错矩阵的同步标准

$$K_{2\upsilon} = \begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} \\ -I^{(\upsilon)} & 0 \end{pmatrix}.$$

定义辛群 $Sp_{2\upsilon}(F_q) = \{T \in GL_n(F_q) \mid TK_{2\upsilon}T' = K_{2\upsilon}\}$ 以及它在 F_q 上 2υ 维行向量空间 $F_q^{(2\upsilon)}$ 上的作用:

$$F_q^{(2\upsilon)} \times Sp_{2\upsilon}(F_q) \to F_q^{(2\upsilon)},$$

$$((x_1, x_2, \cdots, x_{2\upsilon}), T) \to (x_1, x_2, \cdots, x_{2\upsilon})T.$$

把具有这个作用的 $F_q^{(2\upsilon)}$ 称为 2υ 维辛空间且仍记为 $F_q^{(2\upsilon)}$. 设 P 是 $F_q^{(2\upsilon)}$ 的一个 k 维子空间. $m \times 2\upsilon$ 矩阵 X 叫做子空间 P 的一个矩阵表示, 如果它的行向量是 P 的生成元. k 维子空间 P 的 $k \times 2\upsilon$ 矩阵表示特别仍记为 P. $F_q^{(2\upsilon)}$ 的一个 k 维子空间称为全迷向或 $(k, 0)$ 型的, 如果 $PK_{2\upsilon}P' = O^{(k)}$. 把 F_q 上适合方程

$$XK_{2\upsilon}X' = O^{(m)} \tag{4}$$

的解 $m \times 2\upsilon$ 矩阵 X 和秩 k 的 $m \times 2\upsilon$ 矩阵 X 的个数分别记作 $n(K_{2\upsilon}, O^{(m)})$ 和 $n(K_{2\upsilon}, O^{(m)}; k)$.

引理2.1　秩 k 的 $m \times 2\upsilon$ 矩阵 X 是(4)的一个解当且仅当 X 是辛空间 $F_q^{(2\upsilon)}$ 里一个 $(k, 0)$ 型子空间 P 的 $m \times 2\upsilon$ 矩阵表示.

证明　设 X 适合(4). 由 $\mathrm{rank}X = k$ 有 $X = TP$, 这里 T 是秩 k 的 $m \times k$ 矩阵, P 是秩 k 的 $k \times 2\upsilon$ 矩阵. 以 T 为前 k 列作 m 阶非奇异矩阵 M, 那么 $X = M\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$, 且由(4)推出 $PK_{2\upsilon}P' = O^{(k)}$. 这样 P 的 k 个行向量生成辛空间 $F_q^{(2\upsilon)}$ 中一个 $(k, 0)$ 型子空间 P, 它以 X 为矩阵表示. 反之, 若 $F_q^{(2\upsilon)}$ 中 $(k, 0)$ 型子空间 P 以 $m \times 2\upsilon$ 矩阵 X 为矩阵表示, 那么 $\mathrm{rank}X = k$ 且子空间 P 有秩 k 的 $k \times 2\upsilon$ 矩阵表示 P 适合 $PK_{2\upsilon}P' = 0$. 又矩阵 P 的 k 个行向量是子空间 P 的基, 因此存在秩 k 的 $m \times k$ 矩阵 T 使 $X = TP$ 从而 X 适合(4).

定理2.2　设 $0 \le k \le \upsilon$, 那么

$$n(K_{2\upsilon}, O^{(m)}; k) = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon} (q^{2i} - 1), \tag{5}$$

$$n(K_{2\upsilon}, O^{(m)}) = \sum_{k=0}^{\min\{\upsilon, m\}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon} (q^{2i} - 1). \tag{6}$$

证明　对 $(k, 0)$ 型子空间 P 的一个取定 $k \times 2\upsilon$ 矩阵表示 P, F_q 上秩 k 的所有 $m \times k$ 矩阵 T 决定于空间 P 的所有 $m \times 2\upsilon$ 矩阵表示 $X = TP$. 于是由引理2.1得 $n(K_{2\upsilon}, O^{(m)}; k) = N(k, 0; 2\upsilon)$

• $n(k,m)$. 这里 $N(k,0;2\upsilon)$ 表示 $F_q^{(2\upsilon)}$ 里 $(k,0)$ 型子空间个数, 公式见[1]推论3. 19; $n(k,m)$ 是 F_q 上秩 k 的 $m\times k$ 矩阵个数, 公式见[1]引理1. 5, 因此有(5). 又由[1]知 $k\le\upsilon$, 故得(6).

Carlitz L. 在[2]中对奇特征有限域上用特征标的方法也得到 $n(K_{2\upsilon},O^{(m)})$ 的公式, 但他的推证有误, 在文[3]中已经纠正并得到

定理2.3 设 q 是奇素数 p 的方幂. 那么

$$n(K_{2\upsilon},O^{(m)}) = q^{2\upsilon m-\binom{m}{2}}\sum_{2r\le m} q^{r(r-2\upsilon-1)}\frac{\prod_{i=m-2r+1}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{r}(q^{2i}-1)}. \tag{7}$$

定理2.4 设 $q\neq 1$ 是任意复数, 那么有恒等式

$$\sum_{k=0}^{\min\{\upsilon,m\}} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon}(q^{2i}-1) = q^{2\upsilon m-\binom{m}{2}}\sum_{2r\le m} q^{r(r-2\upsilon-1)}\frac{\prod_{i=m-2r+1}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{r}(q^{2i}-1)}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{\min\{\upsilon,m\}} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon}(q^{2i}-1) = q^{2\upsilon m-\binom{m}{2}}\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon+1}]', \tag{9}$$

成立. 这里"'"指该方括号内 g 由 g^{-2} 代替.

证明 当 q 为奇素数方幂时, 由(6), (7)知(8)式左右方都是 $n(K_{2\upsilon},0^{(m)})$ 的公式且都是 q 的有理分式. 对无穷多个奇素数方幂来说(8)成立, 因此(8)对任意复数 g 也成立. 又恒等式(8)右方的和号部分可变形为

$$\sum_{2r\le m}((q^{-2})^{\upsilon+1})^r\frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q^{m-2r+1})}{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2r})}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}((q^{-2})^{\upsilon+1})^r\frac{((q^{-2})^{-\frac{1}{2}m})_r((q^{-2})^{-\frac{1}{2}(m-1)})_r}{((q^{-2}))_r},$$

于是得到恒等式(9).

恒等式(8), (9)给计算带来很大方便. 如 $n(K_{2\upsilon},O^{(m)})$ 求值时, 用右式其非零项是 $[\frac{m}{2}]+1$ 个((9)的右式当 $k=[\frac{m}{2}]$ 时则 r 从0跑到 k 即止)用左式是 $\min\{\upsilon,m\}+1$. 通常使用右式简便(除非 $\upsilon<[\frac{m}{2}]$ 时). 例如当 $2\upsilon=6, m=3$ 时, 右式 $r=0,1$ 仅两项即

$$q^{15}\left[1+q^{-8}\frac{(1-q^3)(1-q^2)}{(1-q^{-2})}\right]=q^{15}+q^{12}-q^9,$$

而左式为

$$1+(q^6-1)\frac{(q^3-1)}{(q-1)}+q(q^6-1)(q^4-1)\frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)}+$$

$$q^3(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)\frac{(q^3-1)(q^2-1)(q-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)}=q^{15}+q^{12}-q^9.$$

运算量相差很大, 因此把所得公式用 q 超几何级数表达是很有意义的工作.

3 恒等式(9)的几个应用

1) 设 F_q 是特征为2的有限域 由[1]第四章知 F_q 上 $2\upsilon+\delta(\delta=0,1$或$2)$ 阶非奇异对称矩阵的同步标准形分别是

$$S_{2\upsilon}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} \\ I^{(\upsilon)} & 0 \end{pmatrix}\text{(交错矩阵)};\ S_{2\upsilon+1}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & \\ I^{(\upsilon)} & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$S_{2\upsilon+2}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & & \\ I^{(\upsilon)} & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}\text{(非交错对称矩阵)}.$$

统一记为 $S_{2\upsilon+\delta}$, $\delta=0$时它定义辛群 $S_{p_{2\upsilon}}(F_q)$; $\delta=1$或2时它分别定义伪辛群 $P_{s_{2\upsilon+1}}(F_q)$ 和 $P_{s_{2\upsilon+2}}(F_q)$, 并且具有后二者作用的空间 $F_q^{(2\upsilon+\delta)}$ 称为伪辛空间 F_q 上适合方程

$$X S_{2\upsilon+\delta} X' = O^{(m)} \tag{10}$$

的 $m\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵 X 和秩 k 的 $m\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵 X 的个数分别记作 $n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)})$ 和 $n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}; k)$. 同2有下述结果

引理3.1 当 $\delta=0$时, 秩 k 的 $m\times2\upsilon$ 矩阵 X 是(10)的一个解当且仅当 X 是辛空间 $F_q^{(2\upsilon)}$ 中一个$(k,0)$型子空间 P 的 $m\times2\upsilon$ 矩阵表示; 当 $\delta=1(\delta=2)$ 时秩 k 的 $m\times(2\upsilon+1)$ $(m\times(2\upsilon+2))$ 矩阵 X 是(10)的一个解当且仅当 X 是伪辛空间 $F_q^{(2\upsilon+1)}$ $(F_q^{(2\upsilon+2)})$ 中一个$(k,0,0,0)$型($(k,0,0,0)$型或$(k,0,0,1)$型)子空间 P 的 $m\times(2\upsilon+1)$ $(m\times(2\upsilon+2))$ 矩阵表示

定理3.2 当 $\delta=0,1$或2时, 有

$$n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}; k) = q^{\binom{k}{2}}(q^{2\upsilon-k+2}-1)^{[\frac{\delta}{2}]}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+[\frac{\delta}{2}]+1}^{\upsilon}(q^{2i}-1), \tag{11}$$

$$n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}) = \sum_{k=0}^{\min\{\upsilon+[\frac{\delta}{2}],m\}} q^{\binom{k}{2}}(q^{2\upsilon-k+2}-1)^{[\frac{\delta}{2}]}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+[\frac{\delta}{2}]+1}^{\upsilon}(q^{2i}-1). \tag{12}$$

证明 $\delta=0$或1时同定理2.2的证明 对 $\delta=2$由引理3.1有

$$n(S_{2\upsilon+2}, O^{(m)}; k) = (N(k,0,0,0;2\upsilon+2)+N(k,0,0,1;2\upsilon+2))\cdot n(k,m),$$

这里 $N(k,0,0,0;2\upsilon+2)$, $N(k,0,0,1;2\upsilon+2)$ 分别表示伪辛空间 $F_q^{(2\upsilon+2)}$ 里$(k,0,0,0)$型和$(k,0,0,1)$型子空间的个数(见[1]p185,186), 且前者$0\le k\le\upsilon$, 后者$1\le k\le\upsilon+1$. 当$1\le k\le\upsilon$时,

$$n(S_{2\upsilon+2}, O^{(m)}; k) = \frac{\prod_{i=\upsilon-k+2}^{\upsilon}(q^{2i}-1)[q^k(q^{2\upsilon-2k+2}-1)+q^k-1]}{\prod_{i=1}^{k}(q^i-1)}\cdot n(k,m);$$

当 $\upsilon+1\le m$ 时,

$$n(S_{2\upsilon+2}, O^{(m)}; \upsilon+1) = N(\upsilon+1,0,0,1;2\upsilon+2)\cdot n(\upsilon+1,m)$$

以及 $n(S_{2\upsilon+2}, O^{(m)}; 0)=1$, 因而得(11). (12)从(11)立得

为用 q 超几何级数表达, 先证 ${}_2\Phi_0$的一个循环关系式

引理3.3

$$q^m\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon+1}]' + (1-q^m)\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}(m-1)}, q^{-\frac{1}{2}(m-2)}; q^{\upsilon}]'$$
$$= {}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon}]', \qquad (13)$$

这里“ ”意义同(9). **证明　由**(3),

$${}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon}]' = \sum_{r=0}^{\infty}(q^{-2\upsilon})^r\frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q^{m-2r+1})}{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2r})},$$

因此(13)**两端代**(3)**化为上形后,只需再证左右第** $r+1$ **项对应相等. 事实上左方为**

$$(q^{-2\upsilon})^r\frac{(1-q^{m-1})(1-q^{m-2})\cdots(1-q^{m-2r+1})}{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2r})}[q^m(1-q^m)q^{-2r}+(1-q^m)(1-q^{m-2r})]$$
$$= ((q^{-2})^{\upsilon})^r\frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q^{m-2r+1})}{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2r})},$$

恰为右方第 $r+1$ **项.**

定理3.4　设 $q=2^t$, **那么对** $\delta=0,1$**或**2**有**

$$n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}) = q^{(2\upsilon+[\frac{\delta}{2}])m-\binom{m}{2}}\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon+1}]', \quad \text{“ ”意义同(9).} \qquad (14)$$

证明　当 $\delta=0$**或**1**时**(12)**即**

$$n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}) = \sum_{k=0}^{\min\{\upsilon,m\}} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon}(q^{2i}-1),.$$

应用恒等式(9)**立得**

$$n(S_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}) = q^{2\upsilon m-\binom{m}{2}}\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon+1}]',$$

即(14). **当** $\delta=2$**时, 注意到** $q^{2\upsilon-k+2}-1=(q^{2\upsilon+2}-1)-q^{2\upsilon-k+2}(q^k-1)$, **那么**(12)**拆分并令** $t=k-1$**后**

$$n(S_{2\upsilon+2}, O^{(m)}) = \sum_{k=0}^{\min\{\upsilon+1,m\}} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_q\sum_{i=\upsilon+1-k+1}^{\upsilon+1}(q^{2i}-1) -$$
$$(q^m-1)q^{2\upsilon+1}\sum_{t=0}^{\min\{\upsilon,m-1\}} q^{\binom{t}{2}}\begin{bmatrix} m-1\\ k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\upsilon-t+1}^{\upsilon}(q^{2i}-1).$$

应用恒等式(9)**后得**

$$n(S_{2\upsilon+2}, O^{(m)}) = q^{2(\upsilon+1)m-\binom{m}{2}}\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon+2}]' -$$
$$(q^m-1)q^{2\upsilon+1}q^{2\upsilon(m-1)-\binom{m-1}{2}}\,{}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}(m-1)}, q^{-\frac{1}{2}(m-2)}; q^{\upsilon+1}]'.$$

再由循环关系式(13)**便得**(14).

2)　**设** F_q **是特征≠2的有限域. 由**[1]**第六章知** F_q **上**$2\upsilon+\delta(\delta=0,1$**或**$2)$**阶非奇异对称矩阵标准形为:**

$$S_{2\upsilon}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)}\\ I^{(\upsilon)} & 0\end{pmatrix},\quad S_{2\upsilon+1,1}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & \\ I^{(\upsilon)} & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$S_{2\upsilon+1,z}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & \\ I^{(\upsilon)} & 0 & \\ & & z\end{pmatrix},\quad S_{2\upsilon+2}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & & \\ I^{(\upsilon)} & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & -z\end{pmatrix},$$

这里 z 是 F_q^* 的一个固定非平方元. 统一记作 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$(这里 $\delta=0,1$或2), Δ 为定号部分, 当 $\delta=0$时不出现; 当 $\delta=1$时, $\Delta=1$或 z; 当 $\delta=2$时, $\Delta=\begin{pmatrix}1&\\&-z\end{pmatrix}$. $S_{2\nu+\delta,\Delta}$定义 F_q 上的正交群 $O_{2\nu+\delta,\Delta}(F_q)$. 具有此群作用的空间称为正交空间 $F_q^{(2\nu+\delta)}$. F_q 上适合方程

$$XS_{2\nu+\delta,\Delta}X'=O^{(m)} \tag{15}$$

的 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 X 和秩 k 的 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 X 的个数分别记作 $n(S_{2\nu+\delta,\Delta},O^{(m)})$ 和 $n(S_{2\nu+\delta,\Delta},O^{(m)};k)$. 同前易证

引理3.5 秩 k 的 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 X 是(15)的解, 当且仅当 X 是正交空间 $F_q^{(2\nu+\delta)}$ 中一个 $(k,0,0)$ 型子空间 P 的 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵表示.

定理3.6 当 $\delta=0,1$或2时有

$$n(S_{2\nu+\delta,\Delta},O^{(m)};k)=q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\nu-k+1}^{\nu}(q^i-1)(q^{i+\delta-1}+1), \tag{16}$$

$$n(S_{2\nu+\delta,\Delta},O^{(m)})=\sum_{k=0}^{\min\{\nu,m\}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\nu-k+1}^{\nu}(q^i-1)(q^{i+\delta-1}+1). \tag{17}$$

证明 同前, 由引理3.5有 $n(S_{2\nu+\delta,\Delta},O^{(m)};k)=N(k,0,0;2\nu+\delta,\Delta)\cdot n(k,m)$, 这里 $N(k,0,0;2\nu+\delta,\Delta)$ 是正交空间 $F_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的 $(k,0,0)$ 型子空间的个数, 公式见[1]推论6.23.

定理3.7 设 q 是奇素数 p 的方幂, 那么有

$$n(S_{2\nu+\delta,\Delta},O^{(m)})=q^{(2\nu+\delta-1)m-\binom{m}{2}}\Big\{{}_2\Phi_0\big[q^{-\frac{1}{2}m},q^{-\frac{1}{2}(m-1)};q^{\nu+[\frac{\delta+1}{2}]}\big]$$
$$(1-\delta)q^{-(\nu+[\frac{\delta}{2}])}(1-q^m)\,{}_2\Phi_0\big[q^{-\frac{1}{2}(m-1)},q^{-\frac{1}{2}(m-2)};q^{\nu+[\frac{\delta+1}{2}]}\big]\Big\}, \tag{18}$$

这里 $\delta=0,1$或2, 并且“ ”意义同(9) ((18)与Carlitz[4]所得一致).

证明 显然当 $\delta=1$时由(17)及恒等式(9)立即得(18):

$$n(S_{2\nu+1,\Delta},O^{(m)})=q^{2\nu m-\binom{m}{2}}\,{}_2\Phi_0\big[q^{-\frac{1}{2}m},q^{-\frac{1}{2}(m-1)};q^{\nu+1}\big].$$

当 $\delta=0$和2时分别注意到

$$q^{\nu-k}+1=(q^\nu+1)-q^{\nu-k}(q^k-1)\text{和}\ q^{\nu-k+1}-1=(q^{\nu+1}-1)-q^{\nu-k+1}(q^k-1),$$

则(17)成为

$$n(S_{2\nu},O^{(m)})=\sum_{k=0}^{\min\{\nu,m\}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\nu-k+1}^{\nu}(q^{2i}-1)-$$
$$(q^m-1)(q^\nu-1)q^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\min\{\nu-1,m-1\}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}m-1\\k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\nu-k}^{\nu-1}(q^{2i}-1),$$

$$n(S_{2\nu+2},O^{(m)})=\sum_{k=0}^{\min\{\nu+1,m\}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\nu+1-k+1}^{\nu+1}(q^{2i}-1)-$$
$$(q^m-1)(q^{\nu+1}+1)q^{\nu}\sum_{k=0}^{\min\{\nu,m-1\}}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}m-1\\k\end{bmatrix}_q\prod_{i=\nu-k+1}^{\nu}(q^{2i}-1).$$

应用恒等式(9)后再由循环关系式(13)便得(18).

3) 令 F_q 是特征为2的有限域, $\mathbf{K}_m$ 表示 F_q 上全体 m 阶交错矩阵的集. 两个 m 阶矩阵 A,B 说是模 $\mathbf{K}_m$ 同余并记作 $A\equiv B$, 如果 $A+B\in\mathbf{K}_m$. F_q 上两个 m 阶矩阵 A,B 说是“同步”

的, 如果存在非奇异矩阵 T 使得 $TAT' \equiv B$. 取 α 是 F_q 中不属于 $N=\{x^2+x \mid x\in F_q\}$ 的一个固定元素, 那么 Dickson L E. (见[1]p50) 证明了 F_q 上任何 m 阶矩阵“同步”于下述矩阵之一且仅一:

$$\begin{pmatrix} 0 & I^{(s)} & \\ & 0 & \\ & & O^{(m-2s)} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & I^{(s)} & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & O^{(m-2s-1)} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & I^{(s)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \alpha & \\ & & & & O^{(m-2s-2)} \end{pmatrix}.$$

这里 s 称为指数, $2s+\delta$, $\delta=0,1$ 或 2 称为“秩”, 为证“同步”的矩阵有相同的指数和“秩”. 把“秩”等于阶数的矩阵称为正则矩阵, 那么 F_q 上正则矩阵“同步”标准形为

$$G_{2\upsilon}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} \\ & 0 \end{pmatrix},\quad G_{2\upsilon+1}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\quad G_{2\upsilon+2}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\upsilon)} & & \\ & 0 & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

统一记为 $G_{2\upsilon+\delta}$, $\delta=0,1$ 或 2 $G_{2\upsilon+\delta}$ 定义 F_q 上正交群 $O_{2\upsilon+\delta}(F_q)$, 具有此群作用的空间 $F_q^{(2\upsilon+\delta)}$ 称为正交空间 一个 k 维子空间 P 称为全奇异子空间或 $(k,0,0)$ 型子空间, 如果它的 $k\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵表示 P 具有 $PG_{2\upsilon+\delta}P' \equiv O^{(k)}$. 把 F_q 上适合同余矩阵方程

$$XG_{2\upsilon+\delta}X' \equiv O^{(m)} \tag{19}$$

的 $m\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵 X 和秩 k 的 $m\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵 X 的个数分别记为 $n(G_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)})$ 和 $n(G_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}; k)$. 仿前可证

引理3.8 秩 k 的 $m\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵 X 是(19)的解当且仅当 X 是正交空间 $F_q^{(2\upsilon+\delta)}$ 中一个 k 维全奇异子空间 P 的 $m\times(2\upsilon+\delta)$ 矩阵表示

定理3.9 当 $\delta=0,1$ 或 2 时, 有

$$n(G_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}; k) = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon} (q^i-1)(q^{i+\delta-1}+1), \tag{20}$$

$$n(G_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}) = \sum_{k=0}^{\min\{\upsilon,m\}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=\upsilon-k+1}^{\upsilon} (q^i-1)(q^{i+\delta-1}+1). \tag{21}$$

证明 同前, 由引理3.8有 $n(G_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}; k) = N(k,0,0; 2\upsilon+\delta)\cdot n(k,m)$, 这里 $N(k,0,0;2\upsilon+\delta)$ 是正交空间 $F_q^{(2\upsilon+\delta)}$ 中 k 维全奇异子空间的个数, 公式见[1]推论7.25.

完全同前一段的推导, 有

定理3.10 设 $q=2^t$, 那么对 $\delta=0,1$ 或 2 有

$$n(G_{2\upsilon+\delta}, O^{(m)}) = g^{(2\upsilon+\delta-1)m-\binom{m}{2}} \{ {}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q^{\upsilon+[\frac{\delta+1}{2}]}] + (1-\delta) q^{-(\upsilon+[\frac{\delta}{2}])} \cdot (1-q^m)\, {}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}(m-1)}, q^{-\frac{1}{2}(m-2)}; q^{\upsilon+[\frac{\delta+1}{2}]}] \}, \tag{22}$$

且“ ”意义同(9).

4 恒等式 ${}_2\Phi_0[c, q^{-n}; q] = c^n$ 的应用

由[6]p149知超几何级数 ${}_3F_2$ 的 Saalschütz 定理的以下 q 模拟被证明也是成立的:

$$ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} b, c, q^{-n} \\ d, bcq^{1-d}/d \end{matrix}; q\right] = \frac{(d/b)_n (d/c)_n}{(d)_n (d/bc)_n}.$$

如果令 $b\to 0$, 那么上式成为 ${}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} c, q^{-n} \\ d \end{matrix}; q\right] = \frac{(d/c)_n}{(d)_n}c^n$, 再令 $d\to 0$, 便得到

定理4.1 设 n 为有理数, c, q 为任意复数, 则有

$$ {}_2\Phi_0[c, q^{-n}; q] = c^n. \tag{23}$$

利用上述恒等式可以证明一些特殊矩阵和矩阵同余类的个数公式.

① 令 F_q 是特征为2的有限域, $\mathcal{S}(m)$ 是全体 m 阶对称矩阵的集. 在同步变换下 $\mathcal{S}(m)$ 被分拆成以指数、秩为特征即同步于标准形 $\begin{pmatrix} S_{2s+\delta} & \\ & O^{(m-2s-\delta)} \end{pmatrix}$ 的矩阵的轨道, 记为 $\mathcal{S}(m, 2s+\delta, s)$, 这里 $0\le 2s+\delta\le m$ 且 $\delta=0, 1$ 或2. 由[1]定理3.30及4.9推知

$$|\mathcal{S}(m, 2s, s)| = q^{s(s-1)}\frac{\prod_{i=m-2s+1}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{s}(q^{2i}-1)}$$

和对 $\delta=1$ 或 2 时,

$$|\mathcal{S}(m, 2s+\delta, s)| = q^{s(s+1)}\frac{\prod_{i=m-2s-\delta+1}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{s}(q^{2i}-1)}.$$

记秩 r 的 m 阶对称矩阵的集为 $\mathcal{S}(m, r)$, 那么有

$|\mathcal{S}(m, 2s)| = |\mathcal{S}(m, 2s, s)| + |\mathcal{S}(m, 2(s-1)+2, s-1)|$,

$|\mathcal{S}(m, 2s-1)| = |\mathcal{S}(m, 2(s-1)+1, s-1)|$.

于是推出若 $r=2s$, 则

$$|\mathcal{S}(m, r-1)| + |\mathcal{S}(m, r)| = q^{-2s}\frac{(q^{m+1}-1)(q^m-1)\cdots(q^{m-2s+2}-1)}{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2s})}.$$

这样当 $m=2t$ 时 s 取0, 1, …, t; 当 $m=2t-1$ 时 s 也取0, 1, …, t, 因为此时 $q^{2t}-1=q^{m+1}-1$ 使

$$|\mathcal{S}(m, m)| = q^{-2t}\frac{(q^{m+1}-1)\cdots(q^{m-2t+2}-1)}{(1-q^{-2})\cdots(1-q^{-2t})}.$$

于是

$$|\mathcal{S}(m)| = \sum_{0\le 2s\le m+1} q^{-2s}\frac{(1-q^{m+1})\cdots(1-q^{m+1}(q^{-2})^{s-1})(1-q^m)\cdots(1-q^m(q^{-2})^{s-1})}{(1-q^{-2})(1-(q^{-2})^2)\cdots(1-(q^{-2})^s)}.$$

令 $b=q^{-2}$, 那么

$$|\mathcal{S}(m)| = \sum_{s=0}^{\infty} b^s\frac{(b^{-\frac{1}{2}(m+1)})_s(b^{-\frac{1}{2}m})_s}{(b)_s} = {}_2\Phi_0[b^{-\frac{1}{2}(m+1)}, b^{-\frac{1}{2}m}; b].$$

根据恒等式(23), 得到 F_q 上 m 阶对称矩阵个数:

$$|\mathcal{S}(m)| = (b^{-\frac{1}{2}(m+1)})^{\frac{1}{2}m} = (q^{m+1})^{\frac{1}{2}m} = q^{\binom{m+1}{2}}.$$

② 设 F_q 是特征2的有限域, F_q 上全体 m 阶矩阵集模 $\mathcal{K}_m$ 后被分成两两不相交的矩阵

同余类$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, …. 用$\mathbf{C}(m)$表示这些同余类组成的集合. 两个矩阵同余类$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$说是"同步"的, 如果有$A\in\mathbf{A}$和有$B\in\mathbf{B}$使A, B"同步". 易证$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$"同步"与同余类A, B的特殊选取无关. 在"同步"变换下$\mathbf{C}(m)$被分成"同步"于含$\begin{pmatrix} G_{2s+\delta} & \\ & O^{(m-2s-\delta)} \end{pmatrix}$的同余类的同余类的轨道, 记为$\mathbf{C}(m, 2s+\delta, s)$, 这里$0\leq 2s+\delta\leq m$且$\delta=0, 1$或2. 由[1]定理7.49推知

$$|\mathbf{C}(m, 2s, s)| = q^{s^2}\frac{\prod_{i=s+1}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=0}^{s-1}(g^i+1)\prod_{i=1}^{m-2s}(q^i-1)},$$

$$|\mathbf{C}(m, 2s-1, s-1)| = q^{s(s-1)}\frac{\prod_{i=m-2s+2}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{s-1}(g^{2i}-1)},$$

$$|\mathbf{C}(m, 2s, s-1)| = q^{s^2}\frac{\prod_{i=s}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=0}^{s}(g^i+1)\prod_{i=1}^{m-2s}(q^i-1)}.$$

记"秩"r的矩阵同余类的集为$\mathbf{C}(m, r)$, 重复1的推证得到F_q上m阶矩阵同余类个数:

$$|\mathbf{C}(m)| = {}_2\Phi_0[b^{-\frac{1}{2}(m+1)}, b^{-\frac{1}{2}m}; b] = (b^{-\frac{1}{2}(m+1)})^{-\frac{1}{2}m} = q^{\binom{m+1}{2}}.$$

③ 设F_q是特征$\neq 2$的有限域, $\mathbf{S}(m)$是F_q上全体m阶对称矩阵的集. 由[1]定理6.36推知$|\mathbf{S}(m, 2s, s)|$, $|\mathbf{S}(m, 2s-1, s-1)|$和$|\mathbf{S}(m, 2s, s-1)|$公式同2中$|\mathbf{C}(m, 2s+\delta, s)|$, 重复1的推证得到

$$|\mathbf{S}(m)| = {}_2\Phi_0[b^{-\frac{1}{2}(m+1)}, b^{-\frac{1}{2}m}; b] = = q^{\binom{m+1}{2}}.$$

④ 设F_q是有限域, $\mathbf{K}(m)$是F_q上全体m阶交错矩阵的集. 由[1]定理3.30知秩$2r$的m阶交错矩阵个数

$$|\mathbf{K}(m, 2r)| = q^{r(r-1)}\frac{\prod_{i=m-2r+1}^{m}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{r}(q^{2i}-1)},$$

因此F_q上m阶交错矩阵的个数:

$$\begin{aligned}|\mathbf{K}(m)| &= \sum_{0\leq 2r\leq m}|\mathbf{K}(m, 2r)| \\ &= \sum_{0\leq 2r\leq m}q^{-2r}\frac{(1-q^m)\cdots(1-q^{m-2r+2})(1-q^{m-1})\cdots(1-q^{m-2r+1})}{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2r})} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(q^{-2})^r\frac{((q^{-2})^{-\frac{1}{2}m})_r((q^{-2})^{-\frac{1}{2}(m-1)})_r}{(q^{-2})_r} = {}_2\Phi_0[q^{-\frac{1}{2}m}, q^{-\frac{1}{2}(m-1)}; q]' \\ &= q^{\binom{m}{2}}\end{aligned}$$

⑤ 令$\mathbf{M}(m\times n)$是有限域F_q上全体$m\times n$矩阵的集. 在$GL_m(F_q)\times GL_n(F_q)$作用的等

价变换下$\mathcal{M}(m\times n)$被分拆成以秩r为特征的轨道, 记为$\mathcal{M}(m\times n, r)$, 这里$0\le r\le \min\{m, n\}$. 由[5]p4知 $|\mathcal{M}(m\times n, r)| = q^{\binom{r}{2}}\begin{bmatrix} m \\ r\end{bmatrix}_q \prod_{i=n-r+1}^{n}(q^i - 1)$. 那么$F_q$上$m\times n$矩阵个数:

$$|\mathcal{M}(m\times n)| = \sum_{r=0}^{\min\{m,n\}} |\mathcal{M}(m\times n, r)| = \sum_{r=0}^{\infty}(q^{-1})^r \frac{((q^{-1})^{-m})_r((q^{-1})^{n})_r}{((q^{-1}))_r}$$
$$= {}_2\Phi_0[b^{-m}, b^{-n}; b] = q^{mn}.$$

参 考 文 献

1 Wan Zhexian. *Geometry of classical groups over finite fields*. Studentlitteratur, Lund, 1993.

2 Carlitz L. *Representations by skew forms in a finite field*. Archiv der Mathematik, 1954, **5**: 19- 31

3 魏鸿增, 张谊宾. 有限域上交错矩阵方程解的计数公式及其q超几何级数表达. 高校应用数学学报, 12卷A辑, 1997, **3**: 337- 346

4 Carlitz L. *Representations by quadratic forms in a finite field*. Duke Math. J., 1954, **21**: 123- 137.

5 Wan Zhexian. *Representations of forms by forms in a finite field*. Finite Fields and Their Applications, 1995, **1**: 297- 325

6 Erdelyi A. 高级超越函数, 第一册. 上海科学技术出版社, 1957.

7 万哲先, 戴宗铎, 冯绪宁, 阳本傅. 有限几何与不完全区组设计的一些研究. 北京: 科学出版社, 1966.

8 魏鸿增, 张谊宾. 特征≠2的有限域上对称矩阵方程解的计数公式及其q超几何级数表达. 数学学报, 1997, **40**(5): 783- 792

Two Identities for q-Hypergeometric Series ${}_2\Phi_0[a, b; z]$ and Its Applications

Wei Hongzeng Zhang Yibin

(Hebei Normal University, Shijiazhuang 050091)

Abstract

In this paper, an elementary identity for q-hypergeometric series ${}_2\Phi_0$ is obtained from two formulas of the number of solutions to the alternate equation $XK_{2\nu}{}^tX = 0$. Using this identity, formulas of the number of solutions of some special matrix equations are represented by q-hypergeometric series. Finally, using another identity of ${}_2\Phi_0$, the numbers of some special matrices over F_q are also obtained.

Keywords q-hypergeometric series, matrix equation, special matrices