第18卷第4期 数学研究与评论 Vol.18 No.4
1998年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1998

高维单形Bartoš体积公式的推广*

郭 曙 光
(江苏盐城师范专科学校, 江苏224002)

摘 要 本文给出单形K维顶点角的概念, 建立单形新的一类体积公式, 导出单形K维顶点角的正弦定理, 并获得关于单形K维顶点角的一个几何不等式

关键词 单形, K维顶点角, 体积公式, 正弦定理, 几何不等式
分类号 AMS(1991) 51K05/CCL O184

P. Bartoš在1968年的一篇文章中引进了如下的n维单形顶点角的定义[1,2]:

设$\Omega=\mathrm{conv}\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$为$E^n$中$n$维单形, $\bar{e}_0, \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n$依次是$\Omega$的$n+1$个界面上的单位法向量, 令

$$D_i=\det(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_{i-1}, \bar{e}_{i+1}, \cdots, \bar{e}_n) \quad (i=0, 1, \cdots, n),$$

则把$\alpha_i=\arcsin|D_i|$定义为此单形的第i个界面所对的顶点角.

从这个定义出发, Bartoš建立了n维单形的正弦定理和与正弦有关的体积公式, 令V表示n维单形Ω的体积, V_i表示Ω的第i个界面的$n-1$维体积, Bartoš证明了

$$V=\frac{1}{n}[(n-1)!V_0V_1\cdots V_{i-1}V_{i+1}\cdots V_n\sin\alpha_i]^{\frac{1}{n-1}} \quad (i=0, 1, \cdots, n).$$

本文将这一体积公式推广为更一般的形式, 为此, 先将单形顶点角的概念加以推广. 不失一般性, 仅就顶点P_0给出结论, 其余类似可得.

对于正整数$k\leq n$, 定义$Q_{k,n}$为数集$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有k元递增序列的集合, 即

$$Q_{k,n}=\{(i_1, i_2, \cdots, i_k)\,|\,1\leq i_1< i_2<\cdots< i_k\leq n;\ i=1, 2, \cdots, m\},$$

其中m等于组合数$\binom{n}{k}$, $Q_{k,n}$中元素按字典式排序.

对单形$\Omega=\mathrm{conv}\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, 简记向量$\overrightarrow{P_0P_i}$为$\bar{p}_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 设$\alpha(i)=(i_1, i_2, \cdots, i_k)\in Q_{k,n}$, 简记$\Omega$的$k$维面单形$\mathrm{conv}\{P_0, P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k}\}$为$f^{(k)}_{\alpha(i)}$, $V^{(k)}_{\alpha(i)}$表示其k维体积, 简记向量外积$\bar{p}_{i_1}\wedge\bar{p}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\bar{p}_{i_k}$为$\xi_{\alpha(i)}$, $|\xi_{\alpha(i)}|$表示其模, $f^{(k)}_{\alpha(i)}, f^{(k)}_{\alpha(j)}$的夹角记为$\langle i, j\rangle$.

由格拉斯曼代数[3]知

$$\cos\langle i, j\rangle=\frac{\xi_{\alpha(i)}\cdot\xi_{\alpha(j)}}{|\xi_{\alpha(i)}|\,|\xi_{\alpha(j)}|} \quad (1\leq i, j\leq m).$$

矩阵$(\cos\langle i, j\rangle)^m_{i,j=1}$的行列式

---

* 1994年11月14日收到

$$\det(\cos\langle i,j\rangle)_{i,j=1}^{m}=\det\left(\frac{\xi_{\alpha(i)}}{|\xi_{\alpha(i)}|}\cdot\frac{\xi_{\alpha(j)}}{|\xi_{\alpha(j)}|}\right)_{i,j=1}^{m}$$
$$=\left|\frac{\xi_{\alpha(1)}}{|\xi_{\alpha(1)}|}\wedge\frac{\xi_{\alpha(2)}}{|\xi_{\alpha(2)}|}\wedge\cdots\wedge\cdots\frac{\xi_{\alpha(m)}}{|\xi_{\alpha(m)}|}\right|^2$$
$$\leq 1,$$

从而, 可定义 $\arcsin[\det(\cos\langle i,j\rangle)_{i,j=1}^{m}]^{\frac{1}{2}}$ 为单形 Ω 的界面 F_0 所对的 k 级顶点角 $(k=1,2,\cdots,n-1)$, 记为 $\angle P_0^{(k)}$.

特别地, 当 $k=n-1$ 时, 适当选取文[2]中 $\bar{e}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的方向, 使得 $\cos\langle i,j\rangle=\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j\,(1\leq i,j\leq n)$, 而这不影响文[2]中的顶点角 α_0. 于是, 有

$$[\det(\cos\langle i,j\rangle)_{i,j=1}^{m}]^{\frac{1}{2}}=[\det(\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j)_{i,j=1}^{n}]^{\frac{1}{2}}=|\det(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n)|.$$

这就是说, $\angle P_0^{(n-1)}$ 正是文[1]中所定义的顶点角 α_0. 从这个顶点角的定义出发, 可将单形 Bartoš 体积公式推广为

定理1 设 $\Omega=\mathrm{conv}\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 为 E^n 中的 n 维单形, $V_{\alpha(i)}^{(k)}\left(i=1,2,\cdots,\binom{n}{k}\right)$ 为单形 Ω 过顶点 P_0 的 k 维面的 k 维体积, 则单形 Ω 的体积

$$V=\frac{1}{n!}\left[(k!)^{\binom{n}{k}}\left(\prod_{i=1}^{\binom{n}{k}}V_{\alpha(i)}^{(k)}\right)\sin\angle P_0^{(k)}\right]^{\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}}. \tag{1}$$

证明 设 $N_1, N_2,\cdots,N_n$ 为 E^n 的一组标准正交基, 则存在可逆 n 阶方阵 A, 使得转置矩阵

$$(\overline{p_1},\overline{p_2},\cdots,\overline{p_n})^T=A\,(N_1,N_2,\cdots,N_n)^T,$$

从而, $V=\dfrac{1}{n!}|\det A|$, $\epsilon_{\alpha(i)}=N_{i_1}\wedge N_{i_2}\wedge\cdots\wedge N_{i_k}\,(i=1,2,\cdots,m)$ 为 $\Lambda^k(R^n)$ 的一组标准正交基

对于 $\alpha(i)=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in Q_{k,n}$, $\beta=(j_1,j_2,\cdots,j_k)\in\alpha_{k,n}$, 用 $A\,[\alpha(i)\,|\beta(j)\,]$ 记由 A 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列交叉元素按原来顺序排列后组成的 k 阶行列式, 则由向量外乘法则[3]知

$$\xi_{\alpha(i)}=\overline{p_{i_1}}\wedge\overline{p_{i_2}}\wedge\cdots\wedge\overline{p_{i_k}}=\sum_{l=1}^{m}A\,[\alpha(i)\,|\alpha(l)\,]\epsilon_{\alpha(l)},$$

$$|\xi_{\alpha(1)}\wedge\xi_{\alpha(2)}\wedge\cdots\wedge\xi_{\alpha(m)}|^2=\det(\xi_{\alpha(i)}\cdot\xi_{\alpha(j)})_{i,j=1}^{m}$$
$$=\det\left(\sum_{l=1}^{m}A\,[\alpha(i)\,|\alpha(l)\,]\cdot A\,[\alpha(j)\,|\alpha(l)\,]\right)_{i,j=1}^{m}$$
$$=[\det(A\,[\alpha(i)\,|\alpha(j)\,])_{i,j=1}^{m}]^2.$$

由文[4]第三讲中定理4知

$$\det(A\,[\alpha(i)\,|\alpha(j)\,])_{i,j=1}^{m}=(\det A)^{\binom{n-1}{k-1}}=(n!V)^{\binom{n-1}{k-1}}.$$

另一方面, 有

$$|\xi_{\alpha(1)}\wedge\xi_{\alpha(2)}\wedge\cdots\wedge\xi_{\alpha(m)}|^2=\prod_{i=1}^{m}|\xi_{\alpha(i)}|^2\left|\frac{\xi_{\alpha(1)}}{|\xi_{\alpha(1)}|}\wedge\frac{\xi_{\alpha(2)}}{|\xi_{\alpha(2)}|}\wedge\cdots\wedge\frac{\xi_{\alpha(m)}}{|\xi_{\alpha(m)}|}\right|^2$$
$$=k!^{2m}\left(\prod_{i=1}^{m}V_{\alpha(i)}^{(k)}\right)^2\det(\cos\langle i,j\rangle)_{i,j=1}^{m}=k!^{2m}\left(\prod_{i=1}^{m}V_{\alpha(i)}^{(k)}\right)^2\sin^2\angle P_0^{(k)}.$$

综上所述, 得

$$(n!V)^{2\binom{n-1}{k-1}} = \left|\xi_{\alpha(1)} \wedge \xi_{\alpha(2)} \wedge \cdots \wedge \xi_{\alpha(m)}\right|^2 = k!^{2m}\left(\prod_{i=1}^{m} V_{\alpha(i)}^{(k)}\right)^2 \sin^2\angle P_0^{(k)},$$

整理得

$$V = \frac{1}{n!}\left[(k!)^{\binom{n}{k}}\left(\prod_{i=1}^{\binom{n}{k}} V_{\alpha(i)}^{(k)}\right)\sin\angle P_0^{(k)}\right]^{\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}}. \quad \square$$

易见, 当 $k=n-1$时, (2)式为单形Bartoš休积公式, 当 $k=1$时, (2)式变为

$$V = \frac{1}{n!}\left(\prod_{i=1}^{n}\left|\overline{p_i}\right|\right)\sin\angle P_0^{(1)} = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left|\overline{p_i}\right|\left[\det(\cos\theta_{ij})_{i,j}^{n}\right]^{1/2},$$

其中 θ_{ij}为棱 P_0P_i 与 P_0P_j 的夹角

若记 $\prod V^{(k)}$ 为单形Ω的所有k维面的k维体积的积, $\prod(\hat{P_i})$ 为Ω的不含顶点P_i的所有k维面的k维体积的积, 则由(2) 式易得Ω的正弦定理的推广

定理 2 对单形 $\Omega = \mathrm{conv}\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, 有

$$\frac{\prod(\hat{P_0})}{\sin\angle P_0^{(k)}} = \frac{\prod(\hat{P_1})}{\sin\angle P_1^{(k)}} = \cdots = \frac{\prod(\hat{P_n})}{\sin\angle P_n^{(k)}} = \frac{(k!)^{\binom{n}{k}}\prod V^{(k)}}{(n!V)^{\binom{n-1}{k-1}}}. \tag{2}$$

由定理1, 还可得到k级顶点角的一个不等式

定理 3

$$\prod_{i=0}^{n}\sin\angle P_i^{(k)} \le \left[\frac{(n+1)^k}{(k+1)^n}\right]^{\frac{n+1}{2n}\binom{n}{k}}. \tag{3}$$

等号当且仅当Ω为正则单形时成立

证明 由定理1得

$$(n!V)^{\binom{n-1}{k-1}} = k!^m\prod(P_i)\sin\angle P_i^{(k)} \quad (i=0,1,2,\cdots,n),$$

其中$\prod(P_i)$ 为单形Ω过顶点P_i的所有k维面的k维体积的乘积 进而有

$$(n!V)^{(n+1)\binom{n-1}{k-1}} = k!^{m(n+1)}\left(\prod_{i=0}^{n}\left(\prod(P_i)\right)\right)\left(\prod_{i=0}^{n}\sin\angle P_i^{(k)}\right),$$

$$\prod_{i=0}^{n}\sin\angle P_i^{(k)} = \frac{n!^{(n+1)\binom{n-1}{k-1}}}{k!^{(n+1)m}}\,\frac{V^{(n+1)\binom{n-1}{k-1}}}{\left(\prod V^{(k)}\right)^{k+1}}.$$

在文[5]的引理1中, 取有限点集为Ω的顶点集, 则有

$$\left[\frac{k!}{\sqrt{k+1}}\left(\prod V^{(k)}\right)^{\frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}}\right]^{\frac{1}{k}} \ge \left[\frac{n!}{\sqrt{n+1}}V\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

式中等号当且仅当Ω为正则单形时成立

由此式可得

$$\frac{V^{(n+1)\binom{n-1}{k-1}}}{\left(\prod V^{(k)}\right)^{k+1}} \le \left[\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}k!^{\frac{n(n+1)}{k}}}{(k+1)^{\frac{n(n+1)}{2k}}n!^{n+1}}\right]^{\binom{n-1}{k-1}},$$

$$\prod_{i=0}^{n}\sin\angle P_i^{(k)} \le \left[\frac{(n+1)^k}{(k+1)^n}\right]^{\frac{n+1}{2n}\binom{n}{k}}.$$

由(4) 式中等号成立的充要条件知, (3) 式等号当且仅当 Ω 为正则单形时成立

在(3) 式中, 令 $k = n - 1$, 即得文[2] 中(20) 式

在(3) 式中, 令 $k = 1$, $\sin\angle P_i^{(1)}$ 代之以 $\frac{n!V}{\prod(P_i)}$ 即得单形的D. Veljan 不等式

$$V \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{0\leq i<j\leq n}\rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}.$$

其中 ρ_{ij} $(0 \leq i < j \leq n)$ 为单形的棱长

参 考 文 献

1 Bortoš P. Časopis Pěst Math., 1968, **93**: 273- 277

2 蒋星耀 关于高维单形顶点角的不等式 数学年刊A, 1987, **8**(6): 668- 670

3 项武义等 古典几何学 复旦大学出版社, 1986, 68- 72

4 李乔 矩阵论八讲 上海科学技术出版社, 1988, 37- 38

5 苏化明 关于切点单形的两个不等式 数学研究与评论, 1990, **10**(2): 243- 246

Generalization of Barloš's Volume Formulas for High-dimensional Simplex

Guo Shuguang

(Jiangsu Yancheng Teachers' College, 224002)

Abstract

In this paper, the concept of k-dimensional vertex angle of simplex is given, a class of volume formulas of simplex are established, sine theorem of k-dimensional vertex angle is derived and a geometric inequality about k-dimensional vertex angle is obtained.

Keywords simplex, k-dimensional vertex angle, volume formula, sine theorem, geometric inequality.