第18卷第4期　　数学研究与评论　　Vol.18 No.4
1998年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1998

关于Smale一个猜想的推广*

沈光星
(杭州师范学院数学与应用研究所, 杭州310036)

摘　要　本文对Smale S. 的一个猜想作了推广, 证明了对 $p>1$, 文[2]中的定理1没有"L^p 形式".

关键词　点估计, 不等式, L^p 形式
分类号　AMS(1991) 65Y20/CCL O241

1　引　言

1986年, Smale S. 在第20届国际数学家大会上, 作了题为《数值分析的复杂性问题》的大会报告[1], 并为此撰写了专题论文[2], 该文第一节的定理1给出了"点估计"判据的一个重要不等式: 对所有的 $r\geq 0$,

$$\alpha(r,\Psi_d)\leq 1,$$

其中

$$\Psi_d(r)=\sum_{i=0}^{d}r^i,\quad \alpha(z,f)=\beta(z,f)\cdot\gamma(z,f),\quad \beta(z,f)=\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|,$$

$$\gamma(z,f)=\max_{1<k\leq d}\left|f^{(k)}(z)/[k!f'(z)]\right|^{\frac{1}{k-1}}.$$

这个不等式是他提出的关于Newton迭代收敛性新判据的基础[3], 也是他建立的求复多项式零点的普遍收敛迭代法的基础[4], 他在节末说, 陈述该不等式的"定理1有一种'L^2形式', 但我尚未将它解决." 1992年, 我们在文[5]中已否定地解决了这个问题. 现在进一步要问, 定理1是否有 $p>1$ 的"L^p 形式"? 即问题推广为: $\alpha(r,\Psi_d)\leq 1$是否对所有的 $r\geq 0$成立? 这里 $\Psi_d(r)=[\sum_{i=0}^{d}r^{pi}]^{1/p}$, 而 p 是大于1的正数.

下面的结果回答了这一问题:

定理A　设 $p>2$, 则对所有的 $r>0$, 有

$$\alpha(r,\Psi_d)>\frac{1}{2r^p}.$$

所以对 $p>2$, 当 $0<r\leq 2^{-1/p}$时,

$$\alpha(r,\Psi_d)>1.$$

* 1994年9月2日收到. 1998年5月22日收到修改稿. 国家和浙江省自然科学基金资助的课题.

定理 B 设$2\geq p>1$, 则对所有的 $r>0$, 有

$$\alpha(r,\Psi_d)\geq\frac{p-1}{2r^p},$$

其中等号当且仅当 $d=1$时成立. 所以, 对$2\geq p>1$, 当$0<r<(\frac{p-1}{2})^{1/p}$时,

$$\alpha(r,\Psi_d)>1.$$

由定理A, 定理B 可知, 对 $p>1$, 定理1没有"L^p 形式".

2 几个引理

记$N\overset{\triangle}{=}\{1,2,3,\cdots\}$.

下面的引理1, 引理2是不难得到的:

引理1 设 $n\in N\cup\{0\}$, $p>2$, 则 $\sum_{i=1}^{n+1}i(pi-1)>\sum_{i=1}^{n+1}i[p(n+1-i)+1]$.

引理 2 设 $n\in N\cup\{0\}$, $2\geq p>1$, 则$\sum_{i=1}^{n+1}i(pi-1)\geq(p-1)\sum_{i=1}^{n+1}i(2n+3-2i)$, 其中等号当且仅当 $n=0$ 时成立.

引理3 设 $n\in N$, $d\in N\setminus\{2\}$, $d\leq n\leq 2d-1$, 则

$$\sum_{i=n-d+1}^{d}i[2(n+1-2i)+2]\leq(d+1)(n-d+1). \tag{1}$$

证明 不难将(1)式化简为$(2d-n)^3-3d^2-3nd-8d+3n^2+7n+3\geq 0$, 令$S\overset{\triangle}{=}2d-n$, 则$1\leq S\leq d$, 而上式可化为

$$3d^2-3(3s-2)d+s^3+3s^2-7s+3\geq 0, \tag{2}$$

若 $s=1,2,3$, 则(2)式分别简化为

$$3d(d-1)\geq 0,\ 3(d-1)(d-3)\geq 0,\ 3(d-3)(d-4)\geq 0,$$

上面三个不等式, 对 $d\in N\setminus\{2\}$显然成立.

若 $S\geq 4$, 因(2)式左端是关于 d 的二次式, 其判别式为

$$\Delta=-3s(4s^2-15s+8)<0,$$

所以不等式(2)成立.

引理4 设 $d,n\in N$, $d\leq n\leq 2d-1$, 则

$$\sum_{i=n-d+1}^{d}i(n+1-2i)\leq 0. \tag{3}$$

证明 因不难将(3)式化简为

$$(2d-n)(1-2d+n)(1+2d-n)\leq 0,$$

所以(3)式显然.

由引理3和引理4立即可得:

引理5 设 $P>2$, $n\in N$, $d\in N\setminus\{2\}$, $d\leq n\leq 2d-1$, 则

$$\sum_{i=n-d+1}^{d}i[p(n+1-2i)+2]\leq(d+1)(n-d+1).$$

引理6 设$2\ge p>1$, $n\in N$, $d\in N\setminus\{2\}$, $d\le n\le 2d-1$, 则

$$\sum_{i=n-d+1}^{d} i[2(p-1)(n+1-2i)+(p-2)i+p]\le(p-1)(d+1)(n-d+1). \tag{4}$$

证明 (1)式两边分别乘$(p-1)$得

$$\sum_{i=n-d+1}^{d} i[2(p-1)(n+1-2i)+2(p-1)]\le(p-1)(d+1)(n-d+1).$$

又因显知$(p-2)\sum\limits_{i=n-d+1}^{d} i(i-1)\le 0$, 上二个不等式相加立即得(4)式

引理7 设$d\in N$, 而$p>2$, $x>0$, 则

$$[\sum_{i=1}^{d} i(pi-1)x^{i-1}][\sum_{i=0}^{d} x^{i}]>(px-x+1)[\sum_{i=1}^{d} ix^{i-1}]^2. \tag{5}$$

证明 将(5)式两端分别展开后, 不难化为

$$\sum_{n=0}^{2d-1} a_n x^n>\sum_{n=0}^{2d-1} b_n x^n, \tag{6}$$

其中

$$a_n=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n+1} i(pi-1), & \text{当 } 0\le n\le d-1,\\ \sum\limits_{i=n-d+1}^{d} i(pi-1), & \text{当 } d\le n\le 2d-1;\end{cases} \tag{7}$$

$$b_n=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n+1} i[p(n+1-i)+1], & \text{当 } 0\le n\le d-1,\\ -(d+1)(n-d+1)+\sum\limits_{i=n-d+1}^{d} i[p(n+1-i)+1], & \text{当 } d\le n\le 2d-1.\end{cases}$$

当$d=2$, (6)式变为$(p-1)+(5p-3)x+(5p-3)x^2+(4p-2)x^3>1+(p+3)x+4px^2+(4p-4)x^3$, 即

$$(p-2)+(4p-6)x+(p-3)x^2+2x^3>0. \tag{8}$$

若$p\ge 3$, (8)式显然成立; 若$3>p>2$, 虽然x^2的系数为负, 但因判别式

$$\Delta=(p-3)^2-8(4p-6)=p^2-38p+57\approx(p-36.43559577)(p-1.56440423)<0,$$

所以(8)式也成立

当$d\in N\setminus\{2\}$, 由引理1, 引理5可知

$$a_n>b_n,\quad \text{若 } 0\le n\le d-1,$$
$$a_n\ge b_n,\quad \text{若 } d\le n\le 2d-1.$$

所以(6)式成立

引理8 设$d\in N$, 而$2\ge p>1$, $x>0$, 则

$$[\sum_{i=1}^{d} i(pi-1)x^{i-1}][\sum_{i=0}^{d} x^{i}]\ge(p-1)(1+x)[\sum_{i=1}^{d} ix^{i-1}]^2, \tag{9}$$

其中等号当且仅当$d=1$时成立

证明 将(9)式两端分别展开后, 不难化为

$$\sum_{n=0}^{2d-1} a_n x^n\ge\sum_{n=0}^{2d-1} c_n x^n, \tag{10}$$

其中

$$c_n=\begin{cases}(p-1)\sum\limits_{i=1}^{n+1} i(2n+3-2i), 当 0\leq n\leq d-1,\\ -(p-1)(d+1)(n-d+1)+(p-1)\sum\limits_{i=n-d+1}^{d} i(2n+3-2i), 当 d\leq n\leq 2d-1;\end{cases},$$

而 a_n 如(7)式所示

当 $d=1$, (10)式变为 $(p-1)(1+x)\geq(p-1)(1+x)$, 上式显然等号成立

当 $d=2$, (10)式变为

$$2x+(5-3p)x^2+2x^3\geq 0. \tag{11}$$

若 $1<p<5/3$, (11)式显然成立, 而且不等号是严格的.

若 $5/3\leq p<2$, 由于判别式

$$\Delta=(5-3p)^2-16=3(1-3p)(3-p)<0,$$

所以(11)式也显然成立, 而且不等号是严格的.

当 $d\in N\setminus\{1,2\}$, 由引理2, 引理6知

$$a_n>c_n,\quad 若 1\leq n\leq d-1,$$
$$a_n\geq c_n,\quad 若 d\leq n\leq 2d-1.$$

所以(10)式成立, 而且不等号是严格的.

3 定理的证明

定理A 的证明 首先, 考虑 $\lim d=\infty$, 这时, $\Psi_\infty(r)\overset{\triangle}{=}\Psi(r)=(1-r^p)^{1/p}$, 因而

$$\Psi'(r)=r^{p-1}(1-r^p)^{-(p+1)/p},\quad \Psi''(r)=(2r^p+p-1)(1-r^p)^{-(2p+1)/p}, r^{p-2},$$
$$\beta(r,\Psi)=|1-r^p|\cdot r^{1-p},\quad \gamma(r,\Psi)\geq(2r^p+p-1)/(2r|1-r^p|),$$

所以

$$\alpha(r,\Psi)\geq 1+1/2r^p+(p-2)/2r^p, \tag{12}$$

可见, 在这极限情况下, $\alpha(r,\Psi)$ 大于1, 也大于 $1/2r^p$.

然后, 考虑 $d\in N$, 经计算得到

$$\Psi_d'(r)=[\sum_{i=1}^{d} ir^{pi-1}][\sum_{i=0}^{d} r^{pi}]^{(1-p)/p},$$

$$\Psi_d''(r)=\{[\sum_{i=1}^{d} i(pi-1)r^{pi-2}][\sum_{i=0}^{d} r^{pi}]+(1-p)[\sum_{i=1}^{d} ir^{pi-1}]^2\}[\sum_{i=0}^{d} r^{pi}]^{(1-2p)/p},$$

所以

$$\alpha(r,\Psi_d)\geq[\Psi_d'(r)\cdot\Psi_d''(r)]/\{2[\Psi_d'(r)]^2\}=[Q(r^p)/R(r^p)]/2r^p, \tag{13}$$

这里

$$R(x)\overset{\triangle}{=}[\sum_{i=1}^{d} ix^{i-1}]^2,$$

$$Q(x)\overset{\triangle}{=}[\sum_{i=1}^{d} i(pi-1)x^{i-1}][\sum_{i=0}^{d} x^i]+(1-p)xR(x).$$

因由引理7知 $Q(r^p) > R(r^p)$，所以对所有的 $r > 0$，有 $\alpha(r, \Psi_d) > 1/2r^p$.

定理 B 的证明 与定理 A 的证明相类似，只是这时(12)式变为

$$\alpha(r, \Psi) \geq 1 + (p - 1)/2r^p,$$

(13)式变为

$$\alpha(r, \Psi_d) \geq [(p - 1)/2r^p][T(r^p)/R(r^p)],$$

这里

$$R(x) \triangleq \Big[\sum_{i=1}^{d} ix^{i-1}\Big]^2,$$

$$T(x) \triangleq [1/(p - 1)]\Big[\sum_{i=1}^{d} i(pi - 1)x^{i-1}\Big]\Big[\sum_{i=0}^{d} x^i\Big] - xR(x).$$

再由引理8知 $T(r^p) \geq R(r^p)$. 而等号当且仅当 $d = 1$ 时成立，所以，对所有的 $r > 0$，有

$$\alpha(r, \Psi_d) \geq (p - 1)/2r^p,$$

其中等号当且仅当 $d = 1$ 时成立.

参 考 文 献

1 Smale S. *On the efficiency of algorithms of analysis*. Bull. AMS, 1985, **13**: 87- 121

2 Smale S. *Algorithms for solving equations*. written for the International congress of Mathematics, 1986, 1- 14

3 Smale S. *Newton's method estimates from data at one point*. To appear in proceedings of a Conference in Honor of Gail Yong, Laramie, Springer, N. Y. 1986, 1- 16

4 Shub M and Smale S. *On the existence of generally convergent algorithms*. J. of Complexity, 1986, **2**: 2 - 11

5 Wang Xinghua, Sheng Guangxing and Han Danfu. *Some Remark on Smale's "Algorithms of solving Equations"*. Acta Mathematica Sinica, New Series, 1992, **4**: 337- 348

On the Generalization of a Hypothesis of Smale

Shen Guangxing

(Inst of Math. & Appl., Hangzhou Teachers' College, 310036)

Abstract

We generalize a hypothesis of Smale and show that Theorem 1 of [2] has not "L^p form" for $p > 1$.

Keywords point estimate, inequality, L^p form.