有限可换主理想环上广义模理论 $T(Q)$ 的模型可归约性*

薛 锐
(北京师范大学数学系, 100875)

摘 要 本文在对两个模型定义了 α,β,n- 扩充的基础上, 利用广义 Ehrenfeucht Game 理论证明了 $T(Q)$ 的模型可归约性, 从而得到: 对无限基数 $\alpha,\beta,(\alpha\geq\beta>\aleph_0)$, 对于模型 $\mathfrak{A}\vDash_{\alpha}T_R(Q)$ 则存在模型 $\mathfrak{B}\vDash_{\beta}T_R(Q)$ 使得 $\mathfrak{A}^{\alpha}\equiv^{\beta}\mathfrak{B}$; 以及任意自然数 $m>0$, 存在模型 $\mathfrak{C}\vDash_{\aleph_0}T_R(Q)$, 使得 $\mathfrak{A}^{\alpha}\equiv_{m}^{\aleph_0}\mathfrak{C}$.

关键词 局部同构, A, B, n-初等等价, A-可满足, Ehrenfeucht Game.
分类号 AMS(1991) 03C/CCL O141.1

R 是有限可换主理想环, 语言 $\mathbf{L}=\{+,\cdot,1,=,f_\lambda\}$, 其中 $\lambda\in R$, f_λ 是一元函数, R-模理论 T_R 的公理为模公理.

令 $\mathbf{L}(Q)$ 为 $\mathbf{L}$ 中加入 Q-量词而得的语言, $\mathbf{L}(Q)$ 的合式公式依照通常意义的构成, 对于任意基数 α, 关于 $\mathbf{L}(Q)$ 的 α-满足: 是把 Q 解释为"存在至少 α 多个元素…", 一般用 $\vDash_\alpha$ 代表 α-满足.

对于 $\mathbf{L}(Q)$ 的两个模型 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, 以及 $a_i\in\mathfrak{A}$, $b_i\in\mathfrak{B}$, $i=1,2,\cdots,n$. g: $a_i\leftrightarrow b_i$ 是 $mod\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 到 $mod\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$ 的局部同构, 建立下面的

定义1 利用归纳法定义 $\langle a_i,b_i\rangle$, $(i\in\{1,2,\cdots,k\})$ 的一个 α,β,n-扩充, 其中 α,β 是两个任意基数.

假设 $\langle a_i,b_i\rangle$, $(i\in\{1,2,\cdots,k\})$ 的一个 α,β,n-扩充已有定义, Γ 是一个序列集, 其中序列的长度均为 $n+1$. 如果 Γ 满足下面 (a), (b) 的条件, 则 Γ 为 $\langle a_i,b_i\rangle$, $(1\leq i\leq k)$ 的一个 $\alpha,\beta,n+1$-扩充.

(a) Γ 中任意序列的前 k 对元素为 $\langle a_i,b_i\rangle$, $(1\leq i\leq k)$, 存在 $\langle a_i,b_i\rangle$, $(1\leq i\leq k)$ 的一个 α,β,n-扩充 Γ, 使得 Γ 中任意序列的长度为 n 的节段都在 Γ 中.

(b) 设 Γ_1, $\langle a_i,b_i\rangle$, $i=1,2,\cdots$, 是 Γ 的一个子集, 取每个序列的长度为 n 的前节是 $\langle a_i,b_i\rangle$, $i=1,2,\cdots,n$. 对任意非空的 Γ_1, 存在一个函数簇 F, 满足:

① $\forall f\in F$, $f\subseteq(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})\times(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})$ 且 $f(x)\in\mathfrak{B}\Leftrightarrow x\in\mathfrak{A}$;

② 对于 $\mathfrak{A}$ 的任意子集 A', 若 $|A'|=\alpha$, 则 $\exists f\in F$, 使得 $|f(A')|=\beta$

③ 对于 $\mathfrak{B}$ 的任意子集 B', 若 $|B'|=\beta$, 则 $\exists g\in F$ 及 $A'\subseteq\mathfrak{A}$ 使得

$$|A'|=\alpha \text{ 及 } g(A')\subseteq B'.$$

* 1994年6月20日收到. 本项目部分受山西省自然科学基金赞助及国家自然科学基金赞助.

④ 对于任意 $f\in F$, $a_{n+1}\in\mathfrak{A}$, $b_{n+1}\in\mathfrak{B}$, 使得 $b_{n+1}=f(a_{n+1})$ 或 $a_{n+1}=f(b_{n+1})$, 则 $a_i\leftrightarrow b_i$, $i=1,2,\cdots,n+1$是局部同构且序列$\langle a_i,b_i\rangle$, $(i=1,2,\cdots,n+1)$在Γ中, 而且Γ恰包含所有这样得到的序列

如果$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$是$L(Q)$的两个模型, 对任意语句$\varphi\in L(Q)$, $\mathfrak{A}\models_\alpha\varphi\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models_\beta\varphi$, 则记为$\mathfrak{A}^\alpha\equiv^\beta\mathfrak{B}$.

由[4]知道, 对于任意α-模型$\mathfrak{A}\models T_{R_p}(Q)$则$\mathfrak{A}=\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{1}^{m_i}R_i$, 其中$R_i=R_p/p^iR_p$, $p^r=char(R_p)$, $(1\leq i\leq r)$.

令$A_i=\bigoplus_{1}^{m_i}R_i$

定义2 $$n_j=\begin{cases}m_j, & 当m_j<\aleph_0,\\ \aleph_0, & 当\aleph_0\leq m_j<\alpha,\\ \beta & 当m_j=\alpha\end{cases}\qquad (j=1,2,\cdots,r)$$

由于$\mathfrak{A}$是α-模型, 从[1]可知不妨设$|\mathfrak{A}|=\alpha$, 则一定存在j, 使$m_j=\alpha$, 因此存在j, 使$n_j=\beta$

定义3 令$\mathfrak{B}=\bigoplus_{j=1}^{r}B_j$, 其中$B_j=\bigoplus_{1}^{n_j}R_j$

调整A_i的顺序可得到$A_1, A_2, \cdots, A_{k_1}, A_{k_1+1}, \cdots, A_{k_2}, A_{k_2+1}, \cdots, A_r$, 使得: $A_1, \cdots, A_{k_1}$每个仅含有限多个直因子; $A_{k_1+1}, \cdots, A_{k_2}$每个仅含无限多个直因子, 且每个基数$<\alpha$; $A_{k_2+1}, \cdots, A_r$每个仅含α多个直因子.

定义4 (1)任意$x\in\mathfrak{A}$, 说x具有原型(i,j,k), $i,j,k\in\{0,1\}$, 若$x=x_1+x_2+x_3$, 其中$x_1\in\bigoplus_{1}^{k_1}A_l$, $x_2\in\bigoplus_{k_1+1}^{k_2}A_l$, $x_3\in\bigoplus_{k_2+1}^{r}A_l$

$$i=\begin{cases}0, & 当x_1=0,\\ 1, & 当x_1\neq0;\end{cases}\qquad j=\begin{cases}0, & 当x_2=0,\\ 1, & 当x_2\neq0;\end{cases}\qquad k=\begin{cases}0, & 当x_3=0,\\ 1, & 当x_3\neq0.\end{cases}$$

(2) $\forall x\in\mathfrak{A}$, $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathfrak{A}$, $o(x)=v$, 且具有原型(i,j,k), 设x关于$a_1,a_2,\cdots a_n$具有型(u,v,i,j,k), 如果$p^ux\in mod\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$, 且$p^{u-1}x\notin mod\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$.

设$\mathfrak{A}$关于$a_1,a_2,\cdots,a_n$的型分类为:

$$Y_1(\mathfrak{A}), Y_2(\mathfrak{A}), \cdots Y_{q_1}(\mathfrak{A}). \qquad (*)$$

又令$g: a_i\leftrightarrow b_i$是$mod\langle a_1,a_2,\cdots a_n\rangle$到$mod\langle b_1,b_2,\cdots b_n\rangle$的同构, 设若$\mathfrak{B}$关于$b_1,b_2,\cdots,b_n$的型分类为:

$$Y_1(\mathfrak{B}), Y_2(\mathfrak{B}), \cdots, Y_{q_2}(\mathfrak{B}). \qquad (**)$$

有如下的:

引理1 (*a*) 设$x\in\mathfrak{A}$, $y\in\mathfrak{B}$, 分别关于$a_1,\cdots,a_n$和$b_1,\cdots,b_n$具有型(u_1,v_1,i_1,j_1,k_1)和(u_2,v_2,i_2,j_2,k_2), 则$mod\langle a_1,\cdots,a_n,x\rangle$与$mod\langle b_1,\cdots,b_n,y\rangle$在映射: $g(a_i)=b_i$, $g(x)=y$下同构的充要条件为$u_1=u_2$, $v_1=v_2$.

(*b*) 对任意$x\in\mathfrak{A}$关于$a_1,\cdots,a_n$具有型$(u,v,i,j,k,)$, 则存在$y\in\mathfrak{B}$关于$b_1,\cdots,b_n$具有型(u,v,i,j,k).

证明　(*a*)“$\Rightarrow$”由同构性质,知 $o(x)=o(y)$,即 $v_1=v_2$. 同理 $p^u x\in mod\langle a_1,\cdots a_n\rangle$ 当且仅当 $p^u y\in mod\langle b_1,\cdots,b_n\rangle$,故也有 $u_1=u_2$.

“$\Leftarrow$”,由 $u_1=u_2$ 明显可得.

(*b*)　①如果特殊的有 $\mathfrak{A}=\bigoplus_1^{m_1}R_p$,对 $a\in\mathfrak{A}$,$p^u a\in mod\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$. 令 $b=g(p^u a)$,这时 $\mathfrak{B}=\bigoplus^{n_1}R_p$ 中一定有 $b_1\in\mathfrak{B}$,使 $p^u a=b_1$,由 $p^u a$ 与 b 的阶数相同,则 b_1 与 a 有相同的阶数.

②　对一般情况 $\mathfrak{A}=\bigoplus^{r}A_l$, $\forall x\in\mathfrak{A}$,具有型 $\langle u,v,i,j,k)\rangle$, $x=x_1+,\cdots+x_r$, $x_l\in A_l$, $l=1,2\cdots r$. x_l 是型 (u_l,v_l,l_l,j_l,k_l) 的元,由①知 $B_l=\bigoplus^{n_1}R_i$ 中有型 (u_l,v_l,i_l,j_l,k_l) 的元 y_l,由(*a*)知,$mod\langle a_1,\cdots,a_n,x_1,\cdots,x_r\rangle$ 与 $mod\langle b_1,\cdots,b_n,y_1,\cdots,y_r\rangle$ 在映射

$$g_1:\begin{cases}a_i\to b_i,\ i=1,2,\cdots n,\\ x_l\to y_l,\ l=1,2,\cdots r.\end{cases}$$

下同构,因而 y_i: $a_i\to b_i$, $x\to y=y_1+y_2+\cdots+y_r$ 是 $mod\langle a_1,\cdots,a_n,x\rangle$ 到 $mod\langle b_1,\cdots,b_n,y\rangle$ 上同构,再根据(*a*)知:y 关于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 具有型 (u,v,i,j,k).

由证明知(*b*)的逆命题也成立.

引理2　(*a*) $\mathfrak{A}$ 中关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的型类个数与 $\mathfrak{B}$ 中关于 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 的型类个数相同.

(*b*) $\mathfrak{A}$ 中型 (u,v,i,j,k) 的基数为 α,当且仅当 $\mathfrak{B}$ 中 (u,v,i,j,k) 型类具有基数 β.

证明　(*a*)由引理1(*b*)可知(*),(**)中 $q_2\geq q_1$,再由(*b*)的逆命题成立知 $q_2\leq q_1$,故知 $q_1=q_2$.

(*b*)　设 $Y_1(\mathfrak{A})$ 是型 (u,v,i,j,k) 的类,且 $|Y_1(\mathfrak{A})|=\alpha$,故知 $k=1$.

设若 $c\in Y_1(\mathfrak{A})$, $c=c_1+c_2+c_3$ 其中 $c_1\in\bigoplus_{i=1}^{k_1}A_i$, $c_2\in\bigoplus_{k_1+1}^{k_2}A_i$, $c_3\in\bigoplus_{k_2+1}^{r}A_i$,由 $k=1$,可知 $c_3\neq 1$,再由引理1(b)知存在 d_1,d_2,d_3,使得 $d_1\in\bigoplus_{i=1}^{k_1}B_i$, $d_2\in\bigoplus_{k_1+1}^{k_2}B_i$, $d_3\in\bigoplus_{k_2+1}^{r}B_i$,且 d_1,d_2,d_3 分别与 c_1,c_2,c_3 具有相同的型. 于是 $d=d_1+d_2+d_3$ 与 c 具有相同的型.

设 c_3 的型为 (u',v',y',j',k'), $p^{u'}c_3\in mod\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$,令 $e=g(p^{u'}c_3)\in mod\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$,可在 $\bigoplus_{k_2+1}^{r}B_i$ 中找到 d_3 使 $p^{u'}d_3=e$, $o(d_3)=v'$,即方程 $px=e$ 在 $\bigoplus_{k_2+1}^{r}\beta$ 中可解. 由[4]定理3知 $\bigoplus^{\beta}R_i$ 中有 β 多个解 r_1; $px=r_1$ 在 $\bigoplus^{\beta}R_i$ 中有 β 多个解 r_2; $\cdots$; $px=r_u$ 在 $\bigoplus^{\beta}R_i$ 中也有 β 多个解 $r_{u'}$,因此可取 β 多个 $d_3\notin mod\langle b_1,\cdots b_r\rangle$,即存在 β 多个 d 与 c 具有相同的型,亦即 $|Y_1(\mathfrak{B})|=\beta$.

有了上述的准备,可以证明本文主要定理如下:

定理3　设 α,β 是两个无限基数,$\alpha\geq\beta>\aleph_0$,则对任意 α-模型 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\vDash{}_\alpha T_{R_p}(Q)$,则一定存在 β 模型 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\vDash{}_\beta T_{R_p}(Q)$ 使得 $\mathfrak{A}^{\alpha}\equiv^{\beta}\mathfrak{B}$.

证明　由[1]知,可以假设 $|\mathfrak{A}|=\alpha$,利用上述讨论,可以找到相应的 $\mathfrak{B}$,且 $\mathfrak{B}\vDash{}_\beta T_{R_p}(Q)$,下面证明 $\mathfrak{A}^{\alpha}\equiv^{\beta}\mathfrak{B}$.

下面构造函数类 F,使其满足定义1. 令映射 f_i: $Y_i(\mathfrak{A})\to Y_i(\mathfrak{B})$ 使其满足:

若 $a\in mod\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$,则 $f_i(a)=g(a)\in mod\langle b_1,\cdots,b_n\rangle$.

$f\cdot= \bigcup_{i=1}^{q} f_i$, $F_1 \cdot= \{f \mid f$ 如定义, f_i 跑遍所有可能的映射$\}$. g_i 是 $Y_i(\mathfrak{B}) \to Y_i(\mathfrak{A})$ 映射满足: 若 $b \in mod\langle b_1, b_2, \cdots, b_n\rangle$, 则令

$$h \cdot= \bigcup_{i=1}^{q} g_i, \quad F \cdot= \{f \cup h \mid f \in F_1\}.$$

下面证明 F 满足我们的要求:

1° 定义1 (b) 中①被满足, 这由定义可知;

2° 设 $A' \subseteq \mathfrak{A}$, $|A'| = \alpha$, 由 F_1 的定义知$\exists f_1 \in F$, 使 $|f_1(Y_i(\mathfrak{A}) \cap A')| = \beta$ 故存在 $f = f_1 \cup h \in F$ 使 $|f(A')| = \beta$

3° 设 $B' \subseteq \mathfrak{B}$, $|B'| = \beta$ 则存在 $Y_j(\mathfrak{B})$, 使 $|Y_j(\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{B}'| = \beta \Rightarrow$ 存在 $f_j \in F_1$, 使 $f_j(Y_j(\mathfrak{A})) \subseteq B' \cap Y_j(\mathfrak{B})$. 因而存在 $f \in F$, 使 $f(Y_j(\mathfrak{A})) \subseteq \mathfrak{B}'$;

4° 由引理1 (a) 可直接证明定义 $1(b)$ ④被满足

由1～4 知 F 是满足定义$1(b)$的函数簇 由[4]可知 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 为 α, β $n+1$-局部同构, 再由 n 的任意性知:

$\mathfrak{A}^{\alpha} \equiv^{\beta} \mathfrak{B}$. 定理得证

定理4 如果存在 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \vDash_{\alpha} T_R(Q)$, 则存在 $\mathfrak{B} \vDash_{\beta} T_R(Q)$, 满足 $\mathfrak{A}^{\alpha} \equiv^{\beta} \mathfrak{B}$. 其中 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 为 $\mathbf{L}(Q)$的结构

证明 由[2], [4]及定理3可立即得到

在上述定理的讨论中, 限定了无限基数 α, β是大于$\aleph_0$的情形, 对于$\aleph_0$的情形有如下结果:

定理5 对于任意自然数 $m > 0$, $T_{R_p}(Q)$ 的任意 α-模型 $\mathfrak{A}$, $\alpha > \aleph_0$, 则存在$\aleph_0$- 模型 $\mathfrak{B}$, 使 $\mathfrak{A}^{\alpha} \underset{m}{\equiv}^{\beta} \mathfrak{B}$.

证明 对应于题设中的 $\mathfrak{A}$, 定义 $\mathfrak{B}$, 类似于上述讨论, 设 $|\mathfrak{A}| = \alpha$, $\mathfrak{A} = \bigoplus^{r} A_i$, $A_i = \bigoplus^{m_i} R_i$, 在定义2中可以定义 n_j 如下:

$$n_j = \begin{cases} m_j, & \text{当 } m_i \leq m, \\ m_i + 1, & \text{当 } m < m_i < \alpha, \\ \aleph_0, & \text{当 } m_i = \alpha \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

定义 $\mathfrak{B} \cdot= \bigoplus^{r} B_i$, $B_i = \bigoplus^{n_i} R_j$, 可见有 $\mathfrak{B} \vDash T_{R_p}(Q)$ 且 $|\mathfrak{B}| = \aleph_0$, 对 $n \leq m$ 进行归纳, 证明 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 是 α, $\aleph_0$, n-局部同构, 证明类似于上述定理3(略去), 再利用[4]可得到 $\mathfrak{A}^{\alpha} \underset{m}{\equiv}^{\beta} \mathfrak{B}$

定理6 对 $m > 0$, $\mathfrak{A} \vDash T_R(Q)$, 则存在 $\mathfrak{B}$, 使 $\mathfrak{B} \vDash_{\aleph_0} T_R(Q)$, 使 $\mathfrak{A}^{\alpha} \underset{m}{\equiv}^{\aleph_0} \mathfrak{B}$.

由定理 5, [4], 可以立得.

定理7 α 为无限基数, 设 $T_R(\alpha) = \{\varphi \mid \varphi$是$\mathbf{L}(Q)$ 中的语句, 满足若 $\mathfrak{A} \vDash_{\alpha} T_R(Q)$ 则 $\mathfrak{A} \vDash_{\alpha} \varphi\}$, 则 $T_R(\alpha) = T_R(\aleph_0)$.

证明 由[2], 有一般结论, $T_R(\alpha) \subseteq T_R(\aleph_0)$. 如果 $T_R(\alpha) \neq T_R(\aleph_0)$, 则存在语句 $\varphi \in \mathbf{L}(Q)$, $\varphi \in T_R(\aleph_0)$, $\varphi \notin T(\alpha)$, 设φ具有前束形, 有m 个量词, 则存在$T_R(Q)$的模 $\mathfrak{A}$, 使得 $\mathfrak{A} \vDash_{\alpha} \varphi$, 由定理 6, 可找到 $\mathfrak{B}$, 使得 $\mathfrak{B} \vDash_{\aleph_0} T_R(Q)$, 并且满足 $\mathfrak{A} \underset{m}{\overset{\alpha}{\equiv}}^{\aleph_0} \mathfrak{B}$, 即 $\mathfrak{B} \vDash_{\aleph_0} \varphi$, 说明 $\varphi \notin T_R(\aleph_0)$, 产生矛盾 因此 $T_R(Q) \supseteq T_R(\aleph_0)$, 亦即有 $T_R(\alpha) = T_R(\aleph_0)$.

参 考 文 献

1 Fuhrken E F. *Skolem type normal forms for first order languages with a generalized quantifier*. Fun. Math., 1964, **54**: 291

2 Wojciechowska A. *Bwl de l'acad*, Polon des Sci, 1969, **17**: 337

3 Fuhrken E F. *Languages with added quantifier "there exist at least Aleph Alpha"*. In the theories of models, edited by Addition J, Henkin L and Tarski A. North Holland, Amsterdam, 1965, 121-131

4 **薛锐 有限主理想环上模理论可判定性及其复杂性 数学研究与评论**, 1997, **17**((3): 437—440

5 **王世强 模型论基础 科学出版社**, 1987.

6 Ferrante J and Rackoff C W. *The Computational Complexity of Logic Theories*. Berlin: Springer Verlag, 1979.

Model Reducibility of Generalized FCPIR-Modules Theory $T(Q)$

Xue Rui

(Dept. of Math., Beijing Normal University, 100875)

Abstract

We deal with the model reducibility of the generalized theory $T(Q)$ of modules on FCPIR, finitely communtative principle ideal ring. By Ehrenfeucht Games Method we confirmed that the model of $T(Q)$ is reducible. That is, for infinite cardinalities α, β with $\alpha \leq \beta < \aleph_0$, and a α-model $\mathfrak{A}$ there exists a β-model $\mathfrak{B}$ s. t. $\mathfrak{A} \equiv^{\beta} \mathfrak{B}$ and further, for a nature number $m > 0$, there exists a $\aleph_0$-model $\mathfrak{C}$, s. t. $\mathfrak{A} \equiv_m^{\aleph_0} \mathfrak{C}$.

Keywords partial isomorphism, α, β, n-extension, α-satisfiable, Ehrenfeucht Game.