第18卷第4期 数学研究与评论 Vol.18 No.4
1998年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1998

关于二部图K(m,n)-2的色唯一性*

邹辉文
(江西抚州师专数学与计算机系, 344000)

摘要 设$K(m,n)-2$表示从完全二部图$K(m,n)$中删去任意2条边所得之图. 本文证明了: 1. 若$n\geq m\geq 3$, 且$n+m>\sqrt{(n-m)^2+8}+\frac{1}{2}(n-m)^2+4$, 则$K(m,n)-2$是色唯一图; 2. 当$m\geq 3$时, $K(m,m)-2$, $K(m,m+1)-2$和$K(m,m+2)-2$均是色唯一图.

关键词 完全二部图, 色唯一图, 色划分.
分类号 AMS(1991) 05C15/CCL O157.5

1 引言

本文的记号未说明时引自文[2,3]. 设下面所讨论的图均为有限、无向的简单图.

设$P(G,\lambda)$表示图G的色多项式. 若对任意图H使$P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$, 都有$H$与$G$同构, 则称$G$是色唯一图.

本文用$K(m,n)$表示完全二部图, $K(m,n)-e$表示从$K(m,n)$中删去任意e条边所得之图. 文[1]指出: $K(m,n)$ $(m,n\geq 2)$和$K(m,n)-1$ $(n\geq m\geq 3)$是色唯一图. 并提出如下问题: 研究$K(m,n)-2$ $(n\geq m\geq 3)$的色唯一性. 本文证明了

定理1 若$n\geq m\geq 3$, 且$n+m>\sqrt{(n-m)^2+8}+\frac{1}{2}(n-m)^2+4$, 则$K(m,n)-2$是色唯一图.

定理2 当$m\geq 3$时, $K(m,m)-2$, $K(m,m+1)-2$和$K(m,m+2)-2$均是色唯一图.

2 若干引理

设G是具有$|V(G)|=p$个顶点的图, $m_r(G)$为将$V(G)$分成r色类的不同色划分的个数, 记

$$\lambda_{(r)}=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1).$$

引理1[3] $P(G,\lambda)=\sum_{r=1}^{p}m_r(G)\lambda_{(r)}.$

* 1995年12月4日收到. 1997年12月5日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

引理 2 设 $\sum_{r=1}^{n} a_r\lambda_{(r)}$, $\sum_{r=1}^{n} b_r\lambda_{(r)}$ 为 λ 的两个多项式, 则 $\sum_{r=1}^{n} a_r\lambda_{(r)} = \sum_{r=1}^{n} b_r\lambda_{(r)}$ 当且仅当 $a_r = b_r$, $r = 1, 2, \cdots, n$.

证明用数学归纳法

推论 2.1 对图 G, H, $P(H, \lambda) = P(G, \lambda)$ 当且仅当

$$|V(H)| = |V(G)|, m_r(H) = m_r(G), r = 1, 2, \cdots, |V(G)|.$$

引理 3 设 $G = K(m, n)$, 则 $m_3(G) = 2^{m-1} + 2^{n-1} - 2$.

证明 设 (M, N) 为 G 的二部分, $|M| = m$, $|N| = n$. 由于 G 中任意两个属于不同部分的顶点均相邻, 故将 $V(G)$ 分成 3 色类的任一色划分等价于将 M, N 之一划分成两类 另一作为一类 显然, 这种划分的方法数分别为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m}{i} = 2^{m-1} - 1$$

和

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i} = 2^{n-1} - 1.$$

所以

$$m_3(G) = 2^{m-1} + 2^{n-1} - 2 \qquad \square$$

引理 4 设 $G = K(m, n)$, $p = |V(G)|$, 则

$$m_{p-2}(G) = \binom{m}{2}\binom{m-2}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{m}{2}\binom{n}{2} + \binom{m}{3} + \binom{n}{3}.$$

证明 $V(G)$ 的一个 $p-2$ 色类的色划分必须是某两个色类分别恰含两个顶点而其余 $p-4$ 个色类各含一个顶点; 或者某个色类恰含 3 个顶点而其余 $p-3$ 个色类各含一个顶点 显然, 这种色划分由含两个顶点的色类或含 3 个顶点的色类唯一确定 由于 $V(G)$ 中任意两个属于不同部分的顶点在 G 中相邻, 故任一色类中顶点都属于同一部分. 于是可知

$$m_{p-2}(G) = \binom{m}{2}\binom{m-2}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{m}{2}\binom{n}{2} + \binom{m}{3} + \binom{n}{3}. \qquad \square$$

令 $G = K(m, n) - 2(n \geq m \geq 3)$. 显然, $|V(G)| = m + n$, $|E(G)| = mn - 2$ 设图 Y 使 $P(Y, \lambda) = P(G, \lambda)$, 则 Y 连通, $\chi(Y) = \chi(G) = 2$[1]. 从而 Y 是从某二部图 $K(s, t)$ 中删去 $e(e \geq 0)$ 条边所得之图 又 $|V(Y)| = |V(G)|$, $|E(Y)| = |E(G)|$[1], 故

$$s + t = m + n, st - e = mn - 2$$

设 J 为整数集, 若令 $s = m + \alpha$, 则

$$t = n - \alpha, \alpha \in J,$$

且有

$$Y = K(m + \alpha, n - \alpha) - e, e = (n - m)\alpha + 2 - \alpha^2, \alpha \in J.$$

若 $e = 2$, 则 $s + t = m + n$, $st = mn$. 故 $\{s, t\} = \{m, n\}$. 设 $H = K(m, n)$, $H' = K(s, t)$, 则 H' 与 H 同构 记 $\delta = m_3(G) - m_3(H)$, $\eta = m_3(Y) - m_3(H')$, 显然, 当 $H(H')$ 中删去的两条边相邻时, $\delta = 3(\eta = 3)$; 当 $H(H')$ 中删去的两条边不相邻时, $\delta = 2(\eta = 2)$. 由推论 2.1 知, $m_3(Y) = m_3(G)$, 又 $m_3(H) = m_3(H')$, 故 $\delta = \eta$ 因此 Y 与 G 同构

引理 5 设 $Y=K(m+\alpha,n-\alpha)-e$，$H'=K(m+\alpha,n-\alpha)$，$\alpha\in J$，记 $\eta=m_3(Y)-m_3(H')$. 若 $\min\{m+\alpha,n-\alpha\}>e\geq 0$，则 $0\leq\eta\leq 2^e-1$.

证明 若 $e=0$，则 $\eta=0$，结论成立. 下设 $e>0$，则 $\eta>0$. 显然，将 $V(H')$ 分成 3 色类的任一色划分都是 $V(Y)$ 的一个 3 色类的色划分，故 η 是由于 H' 中删去 e 条边所增加的 $V(Y)$ 的 3 色类的色划分个数.

设 (M,N) 为 H' 的二部分，$|M|=m+\alpha$，$|N|=n-\alpha$，H' 中删去的 e 条边的端点集为 V'. 首先证明下列

事实 A P 是 $V(Y)$ 但不是 $V(H')$ 的一个 3 色类的色划分当且仅当 P 是 $V(Y)$ 的一个 3 色类的色划分，且 P 由删去的 e 条边中某 $i(1\leq i\leq e)$ 条边的端点集 V_0 作为一个色类，$M-V_0$，$N-V_0$ 分别作为一个色类所得到.

事实 A 的充分性显然，下证必要性.

由假设，P 是 $V(Y)$ 但不是 $V(H')$ 的 3 色类的色划分，故 P 确定的 3 个色类中至少有一个色类 V_0 含有不同部分中的顶点，但 V_0 中的顶点在 Y 中不相邻，故 V_0 由删去的 e 条边中某 i 条边的端点所组成. 又因 $\min\{m+\alpha,n-\alpha\}>e$，故 $M-V'(\subseteq M-V_0)$ 和 $N-V'(\subseteq N-V_0)$ 均非空，且它们必须分别被包含于两个不同又异于 V_0 的色类中，总共只有 3 个色类，故其余二个色类必须分别是 $M-V_0$，$N-V_0$.

由于 η 等于上述色划分 P 的个数，所以

$$\eta\leq\binom{e}{1}+\binom{e}{2}+\cdots+\binom{e}{e}=2^e-1. \qquad \square$$

引理 6 设 $e=(n-m)\alpha+2-\alpha^2\geq 0$，$s=\frac{1}{2}(n+m-\sqrt{(n-m)^2+8})$，则

(1) $\alpha\in D=\{\alpha\,|\,\frac{1}{2}(n-m-\sqrt{(n-m)^2+8})\leq\alpha\leq\frac{1}{2}(n-m+\sqrt{(n-m)^2+8})\}$;

(2) $e_{\max}=\frac{1}{4}(n-m)^2+2$;

(3) $s<m$，$s<n$，$s\leq m+\alpha$，$s\leq n-\alpha$，$\alpha\in D$.

证明 (1) 解关于 α 的二次不等式 $\alpha^2+(m-n)\alpha-2\leq 0$ 即得.

(2) 用微分法求 e 关于 α 的极值即得.

(3) 令 $\alpha_1=\frac{1}{2}(n-m-\sqrt{(n-m)^2+8})$，$\alpha_2=\frac{1}{2}(n-m+\sqrt{(n-m)^2+8})$. 当 $\alpha\in D$ 时，则 $\alpha_1\leq\alpha\leq\alpha_2$. 于是有

$$m+\alpha\geq m+\alpha_1=\frac{1}{2}(n+m-\sqrt{(n-m)^2+8})=s,$$

$$n-\alpha\geq n-\alpha_2=\frac{1}{2}(n+m-\sqrt{(n-m)^2+8})=s.$$

又显然 $\alpha_1<0$，$\alpha_2>0$，故 $s<m$，$s<n$. $\square$

3 定理1的证明

令 $G=K(m,n)-2\ (n\geq m\geq 3)$. 设图 Y 满足 $P(Y,\lambda)=P(G,\lambda)$，则由推论2.1和第2部分所

述可得

$$m_r(Y)=m_r(G),\ r=1,2,\cdots,|V(G)|;$$

$$Y=K(m+\alpha,n-\alpha)-e,\ e=(n-m)\alpha+2-\alpha^2\geq 0,\ \alpha\in J.$$

令 $H=K(m,n)$, $H'=K(m+\alpha,n-\alpha)$, $\delta=m_3(G)-m_3(H)$, $\eta=m_3(Y)-m_3(H')$. 由引理3可推得:

$$m_3(H)-m_3(H')=2^{m-1}+2^{n-1}-2^{m+\alpha-1}-2^{n-\alpha-1},$$

$$m_3(G)-m_3(Y)=m_3(H)-m_3(H')+\delta-\eta$$

令 $s=\frac{1}{2}\left(n+m-\sqrt{(n-m)^2+8}\right)$, $s_0=[s]$, 由引理6得

$$s_0\leq s<m,\ s_0\leq s<n;\ s_0\leq s\leq m+\alpha,\ s_0\leq s\leq n-\alpha,\ \alpha\in D\cap J;\ e\leq\left[\frac{1}{4}(n-m)^2\right]+2$$

又由定理的假设知: $s>\frac{1}{4}(n-m)^2+2\geq e$, 故

$$\min_{\alpha\in D\cap J}\{m+\alpha,n-\alpha\}\geq s>e,\ s_0\geq e.$$

由引理5, 得 $0\leq\eta\leq 2^e-1$. 又由第2部分所述知 $2\leq\delta\leq 3$.

记 $f(\alpha)=2^{m-s_0}+2^{n-s_0}-2^{m+\alpha-s_0}-2^{n-\alpha-s_0}\in J$, 则

$$m_3(H)-m_3(H')=2^{s_0-1}f(\alpha),\ m_3(G)-m_3(Y)=2^{s_0-1}f(\alpha)+\delta-\eta$$

令

$$D_1=\{\alpha\in D\cap J\,|\,m_3(H)-m_3(H')<0\},$$

$$D_2=\{\alpha\in D\cap J\,|\,m_3(H)-m_3(H')>0\},$$

$$D_3=\{\alpha\in D\cap J\,|\,m_3(H)-m_3(H')=0\},$$

则

$$D\cap J=D_1\cup D_2\cup D_3,\ D_i\cap D_j=\varnothing\ (i\neq j).$$

若 $\alpha\notin D_3$, 下面分二种情形讨论

情形1 $\alpha\in D_1$.

若 $n-m=0$, 则 $s_0\geq\left[\frac{1}{4}(n-m)^2\right]+2=2$, 且 $D=\{\alpha\,|\,-\sqrt{2}\leq\alpha\leq\sqrt{2}\}$. 故 $D\cap J=\{-1,0,1\}$. 又 $\alpha\in D_1$, 故

$$m_3(H)-m_3(H')=2^{s_0-1}f(\alpha)<0,$$

从而 $f(\alpha)<0$. 又 $s_0=[s]=m-2$, 故

$$m-s_0=n-s_0=2,$$

即有

$$f(\alpha)=2^2+2^2-2^{\alpha+2}-2^{2-\alpha}<0.$$

于是 $\alpha\neq 0$, 故 $D_1=\{-1,1\}$, $f(\alpha)=-2$, $\alpha\in D_1$. 从而

$$m_3(G)-m_3(Y)=-2\cdot 2^{s_0-1}+\delta-\eta=-2^{s_0}+\delta-\eta<0.$$

若 $n-m=1$, 类似讨论可得: $m_3(G)-m_3(Y)<0$.

若 $n-m\geq 2$, 则 $s_0\geq\left[\frac{1}{4}(n-m)^2\right]+2\geq 3$. 又 $\alpha\in D_1$, 故 $f(\alpha)\leq -1$. 所以

$$m_3(G)-m_3(Y)=2^{s_0-1}f(\alpha)+\delta-\eta\leq -2^{s_0-1}+\delta-\eta<0.$$

总之有: $m_3(G) < m_3(Y)$, 这与 $m_3(G)=m_3(Y)$ 矛盾.

情形2　$\alpha\in D_2$. 这时有 $m_3(H)-m_3(\bar{H})=2^{s_0-1}f(\alpha)>0$, 故 $f(\alpha)\ge 1$.

若 $s_0=s$, 则 $s_0-1=s-1\ge e$, 从而有

$$m_3(G)-m_3(Y)=2^{s_0-1}f(\alpha)+\delta-\eta\ge 2^{s_0-1}+\delta-(2^e-1)>0.$$

若 $s_0<s$, 则 $s_0<m, n, m+\alpha, n-\alpha$, $\alpha\in D_2$, 从而 $f(\alpha)\ge 2$. 于是有

$$m_3(G)-m_3(Y)=2^{s_0-1}f(\alpha)+\delta-\eta\ge 2\cdot 2^{s_0-1}+\delta-(2^e-1)>0.$$

总之有: $m_3(G)>m_3(Y)$, 同样矛盾.

所以 $\alpha\in D_3$. 故

$$m_3(H)-m_3(\bar{H})=2^{m-1}(1+2^{n-m}-2^{\alpha}-2^{n-m-\alpha})=0$$

当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=n-m$, 即 $e=(n-m)\alpha+2-\alpha^2=2$. 从而由第2部分所述知, Y 与 G 同构, 即 $G=K(m,n)-2$ 是色唯一图. □

4　定理2的证明

只证当 $m\ge 3$ 时, $K(m,m+2)-2$ 是色唯一图($K(m,m)-2$ 和 $K(m,m+1)-2$ 的情形完全类似可证).

这时, $n=m+2$, 由定理1知, 当 $2m+2>\sqrt{12}+2+4$, 即 $m\ge 4$ 时, $K(m,m+2)-2$ 是色唯一图. 故只要证 $K(3,5)-2$ 是色唯一图.

令 $G=K(3,5)-2$, $H=K(3,5)$. 设图 Y 满足 $P(Y,\lambda)=P(G,\lambda)$, 由第2段的讨论和引理6知

$$Y=K(3+\alpha,5-\alpha)-e,\ e=2\alpha+2-\alpha^2\ge 0,\ 1-\sqrt{3}\le\alpha\le 1+\sqrt{3},\ \alpha\in J.$$

故 $\alpha\in\{0,1,2\}$. 于是得 Y 的可能情形是

$$K(4,4)-3\text{或}K(3,5)-2$$

若 $Y=K(4,4)-3$, 记 $H=K(4,4)$. 当 H 中删去的3条边依次为图1所示的形状时所对应的图分别记为 H_1, H_2, H_3, H_4. 令 $\eta_r(H_i)=m_r(H_i)-m_r(\bar{H})$, $1\le r\le 8$, $i=1,2,3,4$.

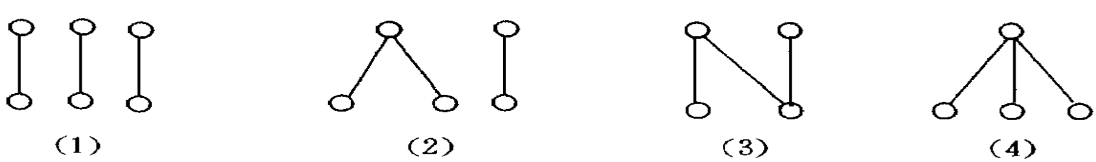

图1

设 G_1, G_2 分别表示当 H 中删去的两条边为不相邻, 相邻时所对应的图. 令

$$\delta_r(G_i)=m_r(G_i)-m_r(H),\ 1\le r\le 8,\ i=1,2.$$

易知 $m_3(\bar{H})=2^3+2^3-2=14$, $\eta_3(H_1)=3$, $\eta_3(H_2)=4$, $\eta_3(H_3)=5$, $\eta_3(H_4)=7$. 故

$$m_3(H_1)=17, m_3(H_2)=18, m_3(H_3)=19, m_3(H_4)=21.$$

$$m_3(H)=2^2+2^4-2=18,\ \delta_3(G_1)=2,\ \delta_3(G_2)=3.$$

因此

$$m_3(G_1)=m_3(H)+\delta_3(G_1)=20,\ m_3(G_2)=m_3(H)+\delta_3(G_2)=21.$$

因为 $m_3(H_i)<m_i(G_j)$, $i=1,2,3$, $j=1,2$, 故 $P(H_i,\lambda)\neq P(G,\lambda)$, $i=1,2,3$, 从而 $Y\neq H_i$, $i=1,2,3$. 于是只可能是 $Y=H_4$. 这时, $m_3(Y)>m_3(G_1)$, 故 $P(Y,\lambda)\neq P(G_1,\lambda)$.

另一方面, 由引理4得

$$m_6(H)=\binom{5}{2}\binom{3}{2}+\binom{3}{2}\binom{5}{2}+\binom{3}{3}+\binom{5}{3}=71,$$

$$m_6(H')=2\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{4}{2}\binom{4}{2}+2\binom{4}{3}=56.$$

于是

$$m_6(G_2)=m_6(H)+\delta_6(G_2)=71+2\left(\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\right)+1=86,$$

$$m_6(Y)=m_6(H')+\eta_6(Y)=56+3\left(\binom{3}{2}+\binom{3}{2}\right)+\binom{3}{2}=77.$$

从而 $m_6(G_2)>m_6(Y)$, 故 $P(Y,\lambda)\neq P(G_2,\lambda)$. 因此 $P(Y,\lambda)\neq P(G,\lambda)$, 矛盾. 所以 $Y=K(3,5)-2$, 故 Y 与 G 同构. □

衷心感谢导师施永兵教授对本文的精心指导和热情帮助。

参 考 文 献

1 Koh R M and Teo K L. *The search for chromatically unique graphs*. Graphs and Combinatorics, 1990, **6**: 259-285

2 Bondy J A and Murty U S R. *Graph theory with applications*. The MacMillan Press, 1976.

3 Biggs N. *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press, 1974.

4 Salzbery P M, Lopez M A and Giudici R E. *On the chromatic uniqueness of bipartite graphs*. Discrete Mathematics, 1986, **58**: 285-294

On the Chromaticity of the Bipartite Graph $K(m,n)-2$

Zou Huiwen

(Dept. of Math & Comp. Sci., Fuzhou Teachers' College, Jiangxi 344000)

Abstract

Let $K(m,n)-2$ denote the bipartite graph obtained by deleting two edges from the complete bipartite graph $K(m,n)$. In this paper, we prove that (1) $K(m,n)-2$ is chromatically unique if $3\leq m\leq n$ and $n+m-((n-m)^2+8)^{1/2}>(n-m)^2/2+4$. (2) $K(m,m)-2$, $K(m,m+1)-2$ and $K(m,m+2)-2$ are all chromatically unique if $m\geq 3$.

Keywords complete bipartite graph, chromatically unique graph, partition into color class