第19卷第1期
1999年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 19 No. 1
Feb. 1999

文"当 $p\to 1$ 时，方程 $-\Delta u=\lambda u^p$ 正解的渐近性质"的一点注记*

杨作东　　郭宗明
(河南师范大学数学系，新乡 453002)

关键词　渐近性质，爆破法，正解.

分类号　AMS(1991) 35J65,35B25/CCL O175.25

文[1]讨论了当 $p\to 1$ 时方程

$$Q(p)\quad \begin{cases}\Delta u+\lambda u^p=0, \text{在 } \Omega \text{ 中}\\ u|_{\partial\Omega}=0,\ u>0\end{cases}$$

正解的渐近性质，本文用爆破法重新得到了文[1]中的主要结果，同时证明了文[1]的定理 2 和定理 3 中得到的方程 Q(p)的正解当 $p\to 1$ 时所要满足的两条性质中有一条实际上根本不出现.

定理 1　设 $\lambda\in(0,\lambda_1)$. 令 $\{u(\cdot,p)\,|\,1<p<\frac{n+2}{n-2}\}$ 是 Q(p)的正解. 则对任何紧集 $K\subset\Omega$，有 $\lim\limits_{p\to 1}\min\limits_{x\in K}u(x,p)=+\infty$. 又有，令 $B=B(\hat{x},R)$ 是包含在 Ω 中的一个开球且 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}\subset(1,\frac{n+2}{n-2})$ 是一任意序列及 $\lim\limits_{i\to\infty}p_i=1$. 则 $\lim\limits_{i\to+\infty}\mathrm{Osc}(u(\cdot,p_i),B)=+\infty$. 这里

$$\mathrm{Osc}(u(\cdot,p_i),B)=\sup_{x\in B}u(x,p_i)-\inf_{x\in B}u(x,p_i).$$

定理 2　设 $\lambda>\lambda_1$，令 $\{u(\cdot,p)\,|\,0<p<1\}$ 是 Q(p)的正解. 则对任何紧集 $K\subset\Omega$，有

$$\lim_{p\to 1}\min_{x\in K}u(x,p)=+\infty.$$

又有，令 $B=B(\hat{x},R)$ 是包含在 Ω 中的一个开球，且 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}\subset(0,1)$ 是任一序列及 $\lim\limits_{i\to+\infty}p_i=1$. 则

$$\lim_{i\to+\infty}\mathrm{Osc}(u(\cdot,p_i),B)=+\infty.$$

引理 1　方程 $-\Delta u=u$ 在 R^n 上没有非平凡的有界正解.

证明　利用球平均方法和文[2]的引理 2.1 可证得.

引理 2　方程 $-\Delta u=u$ 在 $T_1=\{x\in R^n\,|\,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_1>0\}$ 上不存在具有性质 $\lim\limits_{x_1\to\infty}u(x_1,y)=0(\forall\ y\in R^{n-1})$ 的非平凡的有界正解.

证明见文[4]中命题 4.

定理 1 的证明　设 $u(\cdot,p_i)=u_i(\cdot)$ 是 $Q(p_i)$ 的一个正解，则

* 1996年4月1日收到. 1998年5月11日收到修改稿.
国家教委青年基金和河南省科委青年基金资助项目.

$$\begin{cases}-\Delta u_i=\lambda u_i^{p_i}, \text{ 在 } \Omega \text{ 中},\\ u_i|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

由[1]可知$\lim\limits_{i\to\infty}\|u_i\|_\infty=+\infty$. 令 $v_i=u_i/\|u_i\|_\infty$,则有$\|v_i\|_\infty=1$ 且

$$-\Delta v_i=\lambda\|u_i\|_\infty^{p_i-1}v_i^{p_i},\ v_i|_{\partial\Omega}=0. \tag{1}$$

首先证明当 $i\to+\infty$时,$\|u_i\|_\infty^{p_i-1}\to+\infty$. 若不然,利用文[3]中的爆破思想来推出矛盾. 选择 $x_i\in\Omega$ 使得 $v_i(x_i)=1$. 令 $Q_i=\lambda^{\frac{1}{2}}(\|u_i\|_\infty)^{\frac{p_i-1}{2}}d(x_i,\partial\Omega)$,这里 $d(x_i,\partial\Omega)$表示 x_i 到 $\partial\Omega$ 的距离. 分两种情形讨论:

情形(i) 当 $i\to\infty$时,$Q_i\to+\infty$. 做变换 $y_i=\lambda^{\frac{1}{2}}(\|u_i\|_\infty)^{\frac{p_i-1}{2}}(x-x_i)$. 由 $\lim\limits_{i\to+\infty}Q_i=+\infty$ 得 $d(0,\partial\Omega_i)\to+\infty(i\to+\infty)$. 令 $\bar v_i(y_i)=v_i(x)$,则在新的变量下有:

$$\begin{cases}-\Delta\bar v_i=\bar v_i^{p_i},\ y_i\in\Omega_i\\ \bar v_i|_{\partial\Omega_i}=0,\end{cases} \tag{2}$$

且$\|\bar v_i\|_\infty\leqslant 1$. 由$-\Delta$ 的正则性可知:存在$\{\bar v_i\}$的一个子序列(仍记为$\{\bar v_i\}$)使得在 $C^1_{loc}(R^n)$上:$\bar v_i\to\bar v$. 这里$\|\bar v\|_\infty=1$,$\bar v$ 是非负的且 $\bar v(0)=1$(因 $\bar v_i(0)=1$). 而 $\bar v$ 满足$-\Delta\bar v=\bar v$ 在 R^n 上,由引理 1 可知这是不可能的.

情形(ii) $\{Q_i\}$一致有界. 与情形(i)类似可证与引理 2 产生矛盾.

综上所述可得$\{\|u_i\|_\infty^{p_i-1}\}$有界,则可选择子列使得:$\lim\limits_{i\to+\infty}\|u_i\|_\infty^{p_i-1}=a$. 易证 $a\neq 0$. 则从(1)可得在 $C^1_0(\Omega)$上,$\bar v_i\to\bar v$, $\|\bar v\|_\infty=1$ 且

$$\begin{cases}-\Delta\bar v=\lambda a\bar v,\\ \bar v|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{3}$$

于是有 $\lambda_1=\lambda a$,$\bar v(x)$ 对应于 λ_1 的特征函数. 则对 $x\in\Omega$ 有 $\bar v(x)>0$. 因此有:当 $i\to+\infty$ 时,在 $C^1_0(\Omega)$ 上

$$u_i/\|u_i\|_\infty\to\bar v(x), \tag{4}$$

又因为

$$\lim_{i\to+\infty}\|u_i\|_\infty=+\infty \text{且} \operatorname{Osc}(\bar v(\cdot),B)\neq 0,$$

则由(4)可知

$$\lim_{i\to+\infty}\min_{x\in K}u(x,p_i)=+\infty$$

且

$$\lim_{i\to+\infty}\operatorname{Osc}(u(\cdot,p_i),B)=+\infty.$$

$\{p_i\}$的任意性意味着定理 1 的结论成立. 从而说明了文[1]中的定理 2 所得结论的

$$\lim_{i\to+\infty}\inf\|u(\cdot,p_i)\|_{L^\infty(B)}/\|u(\cdot,p_i)\|_{L^\infty(\Omega)}=0$$

不可能出现. 定理 2 可同理证之.

参 考 文 献

1 Lee J R. *Asymptotic behavior of positive solutions of the equations $-\Delta u=\lambda u^p$ as $p\to 1$*. Comm. P.D.E., 1995, **20**(3-4): 633~646

2 Clement P, Manasevich R and Enzo Mitidieri. *Positive solutions for a quasilinear system via blow up*. Comm. P.D.E., 1993, **18**(12): 2071~2106

3 Gidas B and Spruck J. *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. P.D.E., 1981, **6**: 881~901

4 Dancer E N. *On the number of positive solutions of weakly nonlinear elliptic equations when a parameter is large*. Pro. London. Math. Soc., 1986, **53**(3): 429-452

Note on the Paper "Asymptotic Behavior of Positive Solutions of the Equations $-\Delta u=\lambda u^p$ as $p\to 1$"

Yang Zuodong *Guo Zongming*

(Dept. of Math., Henan Normal Univ, Xinxiang 453002)

Abstract

We discuss asymptotic behavior of positive solutions of the equations $-\Delta u=\lambda u^p$ as $p\to 1$. Our results improve those in [1].

Keywords asymptotic behavior, blow-up argument, positive solution.