第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

确定 Sturm-Liouville 问题中系数的反问题*

杨宏奇 侯宗义
(湖南师范大学数学系，长沙 410081) (复旦大学数学研究所，上海 200433)

摘 要 讨论确定 Sturm-Liouville 问题中算子 $Lu\equiv-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du}{dx})+q(x)u(x)$的系数$a(x)$或者$q(x)$的问题. 在一定条件下，系数$a(x)$或者$q(x)$可由数据$\{u_j(x_0)\}_{j=1}^{\infty}$或者数据$\{a(x_0)\frac{du_j(x_0)}{d/x}\}_{j=1}^{\infty}$唯一确定，这里的$u_j(x)$满足

$Lu_j(x)=\psi_j(x), x\in(0,1)$, $u_j(0)\cos\alpha+u_j'(0)\sin\alpha=0$, $u_j(1)\cos\beta+u_j'(1)\sin\beta=0$,

而$\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$构成$L^2(0,1)$的一个基，$\alpha$和$\beta$为给定的实数.

关键词 Sturm-Liouville 问题，反问题.

分类号 AMS(1991) 34A55/CCL O175.1

1 引 言

Sturm-Liouville 型系数反问题以及与其相关的抛物型方程和双曲型方程的反问题已有不少文献做过研究[1~8]. 最近 Lowe 和 Rundell[9~10]提出了变动 Sturm-Liouville 方程右端的强制函数(即自由项)来确定算子中系数的新方法. 本文对上述方法作进一步的探讨和推广.

本文考虑确定下述 Sturm-Liouville 问题中方程的系数$a(x)$或者$q(x)$的问题：

$$Lu\equiv-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du(x)}{dx})+q(x)u(x)=\psi(x),\ x\in(0,1), \tag{1.1}$$

$$u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0, \tag{1.2}$$

$$u(1)\cos\beta+u'(1)\sin\beta=0, \tag{1.3}$$

算子中的系数$a(x)\in W^{2,\infty}(0,1)$，$q(x)\in W^{1,\infty}(0,1)$，并且$a(x)\geqslant\text{const}>0$，$\alpha$和$\beta$为确定的实数. 假定数 0 不是算子$L$具边界条件(1.2)～(1.3)的特征值，这样，对给定的$\psi(x)$，边值问题(1.1)～(1.3)有唯一解. 用$u_j(x)=u_j(x;a,q)$表示问题(1.1)～(1.3)的对应于$\psi=\psi_j(x)$的解，这里的$\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$构成$L^2(0,1)$的一个基. 实际应用中，对某一观察点$x_0$，至少有两种类型的观察数据：

(Ⅰ) $M=\{u_j(x_0)\}_{j=1}^{\infty}$,

(Ⅱ) $N=\{a(x_0)\frac{du_j(x_0)}{dx}\}_{j=1}^{\infty}$,

可供利用. 本文的主要结果是

(1) 当$M\neq\{0\}$时，由M可唯一确定$q(x)$或者$a(x)$，

* 1996年1月3日收到.
国家自然科学基金资助项目.

(2) 当 $x_0 \in H$ 时，由 N 可唯一确定 $q(x)$ 或者 $a(x)$，这里的集合 H 将在第 2 节中给出. 因此条件

(P_1) $M \neq \{0\}$，

(P_2) 对应于数据集合 N 的观察点 $x_0 \in H$，

实际上是对 x_0 点位置的限制，这种对观察点的限制同文献[2,6,7]中一样，是重要的，其作用也类似于文献[3～5,7,8]中要求初始条件中的函数所应满足的条件. Lowe 和 Rundell 曾利用在边界点 $x_0=0$ 或 $x_0=1$ 处的(Ⅱ)型数据研究了对应于边值问题(1.1)～(1.3)当 $\alpha=\beta=0$ 时这种特殊情形的系数反问题，此时 $x_0 \in H$ 是自然满足的.

在第 2 节中将讨论确定 $q(x)$ 的问题，而在第 3 节中再讨论确定 $a(x)$ 的问题.

2 确定系数 $q(x)$

在以后的论述中，要用到边值问题(1.1)～(1.3)的格林函数 $G(x,\xi)=(G,\xi;a,q)$，其定义如下

$$-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx})+q(x)G(x,\xi)=\delta(x-\xi),\ 0<x<1, \tag{2.1}$$

$$G(0,\xi)\cos\alpha+\frac{d}{dx}G(0,\xi)\sin\alpha=0, \tag{2.2}$$

$$G(1,\xi)\cos\beta+\frac{dG(1,\xi)}{dx}\sin\beta=0. \tag{2.3}$$

若用 $w_1(x)=w_1(x;a,q)$ 表示齐次方程(1.1)满足边界条件(1.2)的一个非零解，用 $w_2(x)=w_2(x;a,q)$ 表示齐次方程(1.1)满足(1.3)的一个非零解，则可知

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-w_1(x)w_2(\xi)/c, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ -w_2(x)w_1(\xi)/c, & \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{2.4}$$

$$a(x)(w_1w_2'-w_1'w_2)=c, \tag{2.5}$$

这里的 c 为不等于 0 的常数. 下面给出 H 的定义

$$H=\{x\mid 0<x<1, w_1'(x)=0 \text{ 或 } w_2'(x)=0\}$$
$$\cup\{x\mid x=0 \text{ 且 } w'(0)=0\}\cup\{x\mid x=1 \text{ 且 } w_2'(1)=0\}. \tag{2.6}$$

本节中假定 $a(x)$ 为已知函数，$q(x)$ 为待确定的未知函数，将证明，当假设(P_1)成立时，由数据 $\{u_j(x_0;a,q)\}_{j=1}^{\infty}$ 可唯一地确定 $q(x)$；而当假设(P_2)成立时，由 $\{a(x_0)\frac{\partial u_j(x_0,a,q)}{\partial x}\}_{j=1}^{\infty}$ 也可唯一确定 $q(x)$.

引理 1 如果 $u_j(x_0;a,q_1)=u_j(x_0;a,q_2)$，$j=1,2,\cdots$，则有

$$G(x_0,\xi;a,q_1)=G(x_0,\xi;a,q_2),\ \xi\in[0,1].$$

证明 问题(1.1)～(1.3)的解为

$$u(x;a,q)=\int_0^1 G(x,\xi;a,q)\psi(\xi)d\xi,$$

因之

$$u_j(x_0;a,q_i)=\int_0^1 G(x_0,\xi;a,q_i)\psi_j(\xi)d\xi.$$

显然 $G(x_0,\xi;a,q_i)\in L_\xi^2(0,1)$，由引理条件即可得

$$G(x_0,\xi;a,q_1)=G(x_0,\xi;a,q_2)$$

在 $\xi\in[0,1]$上成立.

与引理 1 的证明类似，有

引理 2 如果 $a(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a,q_1)}{\partial x}=a(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a,q_2)}{\partial x}$，$j=1,2,\cdots$. 则有

$$G'_x(x_0,\xi;a,q_1)=G'_x(x_0,\xi;a,q_2),\xi\in[0,x_0)\cup(x_0,1].$$

定理 1 设(P_1)成立，若 $u_j(x_0;a,q_1)=u_j(x_0;a,q_2)$，$j=1,2,\cdots$. 则有 $q_1(x)=q_2(x)$在 $x\in[0,1]$上成立.

证明 由(2.4)有

$$G(x,\xi;a,q_i)=\begin{cases}-w_1(x;a,q_i)w_2(\xi;a,q_i)/c,\ \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\xi \text{ 时},\\ -w_2(x;a,q_i)w_1(\xi;a,q_i)/c,\ \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时},\end{cases}$$

应用引理 1，由(P_1)可得：$G(x_0,\xi;a,q_1)=G(x_0,\xi;a,q_2)\not\equiv 0$，因而有

$$w_1(x_0;a,q_i)\neq 0,\ w_2(x_0;a,q_i)\neq 0, \tag{2.7}$$

且

$$w_1(\xi;a,q_1)=k_1w_1(\xi;a,q_2),\ \text{当 } 0\leqslant\xi\leqslant x_0, \tag{2.8}$$

$$w_2(\xi;a,q_1)=k_2w_2(\xi;a,q_2),\ \text{当 } x_0\leqslant\xi\leqslant 1, \tag{2.9}$$

这里的 k_1,k_2 为不为 0 的常数.

今证明当 $0\leqslant\xi\leqslant x_0$ 时，有 $q_1=q_2$ 成立. 因为 $w_1(\xi;a,q_i)$满足

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(a(\xi)\frac{\mathrm{d}w_1(\xi;a,q_1)}{\mathrm{d}\xi}\right)+q_1(\xi)w_1(\xi;a,q_1)=0,$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(a(\xi)\frac{\mathrm{d}w_1(\xi;a,q_2)}{\mathrm{d}\xi}\right)+q_2(\xi)w_1(\xi;a,q_2)=0,$$

由(2.8)及上两式得到

$$(q_1(\xi)-q_2(\xi))w_1(\xi;a,q_1)=0,\ \xi\in[0,x_0]. \tag{2.10}$$

$w_1(\xi;a,q_1)$在$[0,x_0]$上最多只有有限个零点，否则存在一个点 $\xi^*\in[0,x_0)$，使得 $w_1(\xi^*;a,q_1)=w'_1(\xi^*;a,q_1)=0$，但 w_1 满足齐次方程(1.1)，故 $w_1(\xi;a,q_1)=0,\xi\in[0.x_0]$，这与(2.7)式矛盾. 所以，由(2.10)得到 $q_1(\xi)=q_2(\xi)$在$[0,x_0]$上成立.

同理可证 $q_1(\xi)=q_2(\xi)$，$\xi\in[x_0,1]$. 这样有 $q_1=q_2$ 在$[0,1]$上成立.

定理 2 设(P_2)成立，若 $a(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a,q_1)}{\partial x}=a(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a,q_2)}{\partial x}$，$j=1,2,\cdots$. 则有 $q_1(x)=q_2(x)$在$[0,1]$上成立.

证明 由于引理 2，$G'_x(x_0,\xi;a,q_1)=G'_x(x_0,\xi;a,q_2)$. 当 $\xi\neq x_0$ 时成立，又

$$G'_x(x_0,\xi;a,q_i)=\begin{cases}-w'_1(x_0;a,q_i)w_2(\xi;a,q_i)/c,x_0<\xi\leqslant 1,\\ -w'_2(x_0;a,q_i)w_1(\xi;a,q_i)/c,0\leqslant\xi<x_0,\end{cases}$$

当 x_0 为边界点时的情形比较容易证明，仅讨论 $0<x_0<1$ 的情形. 由于(P_2)成立，有

$$w'_1(x_0;a,q_i)\neq 0,\ w'_2(x_0;a,q_i)\neq 0, \tag{2.11}$$

且

$$w_1(\xi;a,q_1)=k_3w_1(\xi;a,q_2),\ 0\leqslant\xi\leqslant x_0, \tag{2.12}$$

$$w_2(\xi;a,q_1) = k_4 w_2(\xi;a,q_2),\ x_0 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{2.13}$$

这里的 k_3, k_4 为不等于 0 的常数. 余下的证明与定理 1 的证明过程类似，可由(2.12)及(2.11)先证在 $0 \leqslant \xi \leqslant x_0$ 上有 $q_1 = q_2$ 成立，再由(2.13)及(2.11)证在 $x_0 \leqslant \xi \leqslant 1$ 上 $q_1 = q_2$，从而完成了定理的证明.

3 确定 $a(x)$

本节假定 $q(x)$ 为已知函数，$a(x)$ 为待定的未知函数，除引言中条件外，假定

(A) $a(x)$ 的值在 $x=0, x=1$ 处已给定，

(B) $q(x) > 0$.

类似于引理 1 和引理 2，有

引理 3 如果 $u_j(x_0;a_1,q) = u_j(x_0;a_2,q)$，$j=1,2,\cdots$. 则有

$$G(x_0,\xi;a_1,q) = G(x_0,\xi;a_2,q),\ \xi \in [0,1].$$

引理 4 如果 $a_1(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a_1,q)}{\partial x} = a_2(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a_2,q)}{\partial x}$，$j=1,2,\cdots$，则有

$$a_1(x_0)G'_x(x_0,\xi;a_1,q) = a_2(x_0)G'_x(x_0,\xi;a_2,q),\ \xi \neq x_0.$$

定理 3 设(P_1)成立，如果 $u_j(x_0;a_1,q) = u_j(x_0;a_2,q)$，$j=1,2,\cdots$. 则有

$$a_1(x) = a_2(x),\ x \in [0,1].$$

证明 由引理 3 及(P_1)，$G(x_0,\xi;a_1,q) = G(x_0,\xi;a_2,q) \neq 0$，又

$$G(x,\xi;a_i,q) = \begin{cases} -w_1(x;a_i,q)w_2(\xi;a_i,q)/c, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -w_2(x;a_i,q)w_1(\xi;a_i,q)/c, & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

得到

$$w_1(x_0;a_i,q) \neq 0,\ w_2(x_0;a_i,q) \neq 0, \tag{3.1}$$

$$w_1(\xi;a_1,q) = k_5 w_1(\xi;a_2,q),\ 0 \leqslant \xi \leqslant x_0, \tag{3.2}$$

$$w_2(\xi;a_1,q) = k_6 w_2(\xi;a_2,q),\ x_0 \leqslant \xi \leqslant 1. \tag{3.3}$$

这里 k_5, k_6 为不等于 0 的常数.

现证明 $a_1 = a_2$，$\xi \in [0,x_0]$. 因为当 $0 \leqslant \xi \leqslant x_0$ 时，有

$$-(a_1(\xi)w'_1(\xi;a_1,q))' + q(\xi)w_1(\xi;a_1,q) = 0, \tag{3.4}$$

$$-(a_2(\xi)w'_1(\xi;a_2,q))' + q(\xi)w_1(\xi;a_2,q) = 0, \tag{3.5}$$

由上两式及(3.2)，得到

$$[a_1(\xi) - a_2(\xi)]w'_1(\xi;a_1,q) = c_1,\ \xi \in [0,x_0],$$

这里 c_1 为常数，现在由条件(A) $a_1(0) = a_2(0)$，知 $c_1 = 0$. 而 $w'_1(\xi;a_1,q)$ 在$[0,x_0]$上最多有有限个零点. 否则存在 $\xi^* \in [0,x_0]$，使 $w'_1(\xi^*;a_1,q) = w''_1(\xi^*;a_1,q) = 0$，由方程(3.4)及条件(B)得到 $w_1(\xi^*;a_1,q) = 0$，从而有 $w_1(\xi;a_1,q) = 0$，$\xi \in [0,x_0]$，这与(3.1)式矛盾. 这样就有 $a_1(\xi) = a_2(\xi)$ 在 $0 \leqslant \xi \leqslant x_0$ 上成立. 同理可证 $a_1 = a_2$ 在$[x_0,1]$上成立.

综上所述，$a_1(\xi) = a_2(\xi)$，$\xi \in [0,1]$. 定理证毕.

类似地，应用引理 4 可证明

定理 4 设(P_2)成立，若 $a_1(x_0)\dfrac{\partial u_j(x_0;a_1,q)}{\partial x} = a_2(x)\dfrac{\partial u_j(x_0;a_2,q)}{\partial x}$，$j=1,2,\cdots$. 则有

$$a_1(x)=a_2(x), x\in[0,1].$$

参 考 文 献

1 Levitan B M. *Inverse Sturm-Liouville problems.* Utrecht: VNU Science Press, 1987.

2 Pierce A. *Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem.* SIAM J. Contr. Opt., 1979, **17**: 494～499

3 Murayama R. *The Gel'fand-Levitan theory and certain inverse problems for the parabolic equation.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA, 1981, **28**: 317～330

4 Suzuki T. *Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation.* J. Diff. Eq., 1983, **47**: 296～316

5 Suzuki T. *Gel'fand-Levitan's theory, deformation formulas and inverse problems.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA, 1985, **32**: 223～271

6 Kravaric C, Seinfeld J H. *Identifiability of spatially-varying conductivity from point observation as an inverse Sturm-Liouville problem.* SIAM J. Contr. Opt., 1986, **24**: 522～542

7 Suzuki T. *Inverse problems for heat equations on compact intervals on circles* I. J. Math. Soc. Japan, 1986, **38**: 39～65

8 王秀兰. 双曲方程的一个反问题. 数学研究与评论, 1993, **13**(4): 549～556

9 Lowe B D, Rundell W. *The determination of multiple coefficients in a second-order differential equation from input sources.* Inverse Problems, 1993, **9**: 469～482

10 Lowe, B D. Rundell, W. *An inverse problem for a Sturm-Liouville operator.* J. Math. Anal., 1994, **181**: 188～199

An Inverse Problem of Determining the Coefficients in a Sturm-Liouville Problem

Yang Hongqi

(Dept. of Math., Hunan Normal University, Changsha 410081)

Hou Zongyi

(Mathematics Institute, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

We discuss the problem of determining the coefficients $a(x)$ or $q(x)$ of the operator $Lu=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x})+q(x)u(x)$ in a Sturm-Liouville system. Under certain conditions, the coefficients $a(x)$ or $q(x)$ can be uniquely determined by the data $\{u_j(x_0)\}_{j=1}^{\infty}$ or $\{a(x_0)\frac{\mathrm{d}u(x_0)}{\mathrm{d}x}\}_{j=1}^{\infty}$. Where $u_j(x)$ solves

$$Lu_j(x)=\psi_j(x), x\in(0,1),\ u_j(0)\cos\alpha+u_j'(0)\sin\alpha=0,\ u_j(1)\cos\beta+u_j'(1)\sin\beta=0,$$

and $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ is a basis of $L^2(0,1)$.

Keywords Sturm-Liouville problem, inverse problem.