一类奇异的椭圆边值问题正解的存在性*

许 兴 业
(广东教育学院数学系，广州 510303)

摘 要 本文主要目的是证明一类奇异的椭圆边值问题正解的存在性，开拓了 H. Usami[1]于1989年所得的部分结果.

关键词 边值问题，正解，上解，下解.
分类号 AMS(1991) 35J25/CCL O175.25

1 引言和引理

本文证明一类含有哈密尔顿算子∇的奇异椭圆边值问题

$$\Delta u + f(x,\nabla u)u^{-\lambda} = 0, \quad x \in B \subset R^N, \tag{1}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial B. \tag{2}$$

在一定的条件下存在正解 $u \in C^2(B)\cap C(\overline{B})$. 其中 Δ 是 N 维($N \geqslant 2$)Laplace 算子. $B = \{x \mid |x| < 1, x \in R^N\}$，$\partial B$ 是 B 的边界，$\lambda > 0$. 所得的结果开拓了[1]所得的部分结果.

先考虑(1)中的 f 为 $F(|x|, |\nabla u|)$的情形，于是转到讨论下面边值问题解的存在性：

$$(t^{N-1}y')' + t^{N-1}F(t,|y'|)y^{-\lambda} = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

$$y'(0) = 0,\ y(1) = 0. \tag{4}$$

下文中假设 $F(t,z)$满足下面的条件：

(F_1) $F:[0,1)\times[0,\infty)\to(0,\infty)$是连续函数，$F(t,z)$关于 $z \geqslant 0$ 连续可微，且每对一固定的 $t \in [0,1)$，$F(t,z)$关于 $z \geqslant 0$ 单调增；

(F_2) 存在 $M > 0$，使得 $\int_0^1\int_0^s (\frac{\tau}{s})^{N-1} f(\tau,d)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s < M$ 关于 $d \geqslant 0$ 一致地成立；

(F_3) 对$\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $1-\delta < t < 1$ 时，有 $\int_t^1\int_0^s (\frac{\tau}{s})^{N-1} F(\tau,d)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s < \varepsilon$，关于 $d \geqslant 0$ 一致地成立.

为了研究(3)，(4)正解的存在性，考察下面的初值问题

$$(t^{N-1}y')' + t^{N-1}F(t,|y'|)y^{-\lambda} = 0, \tag{5}$$

$$y(0) = \alpha,\ y'(0) = 0. \tag{6}$$

由假设(F_1)知对每一 $\alpha > 0$，(5)，(6)存在唯一正解 $y_\alpha(t)$，$t \in [0, T_\alpha)$，其中$[0, T_\alpha)$为 $y_\alpha(t)$ 的最大存在区间，显然 T_α 的值它位于 $0 < T_\alpha \leqslant 1$. 如果 $T_\alpha < 1$，那么 $y_\alpha(t) > 0$，$0 \leqslant t < T_\alpha$；$y_\alpha(T_\alpha)$

* 1996年6月7日收到. 1998年4月30日收到修改稿.

$=0$. 又 $y_\alpha(t)$连续依赖于初值 α.

引理 1 设 F 满足条件$(F_1)-(F_3)$,若 α,β 为正数且 $\alpha>\beta$,假设 $y_\beta(t)$在$[0,T)$上存在$(0<T\leqslant 1)$,则 $y_\alpha(t)$也在$[0,T)$上存在且满足

$$y_\alpha(t)>y_\beta(t),\quad t\in[0,T),\tag{7}$$

$$y'_\alpha(t)>y'_\beta(t),\quad t\in(0,T).\tag{8}$$

证明 (i) 设 $y_\alpha(t),y_\beta(t)$ 都在$[0,T)$上有定义,则 $y'_\alpha(t)>y'_\beta(t),t\in(0,T)$. 事实上,由(5),(6)及$(F_1)$有 $y'_\alpha(t)=-\int_0^t(\frac{s}{t})^{N-1}F(s,|y'_\alpha(s)|)y_\alpha^{-\lambda}(s)\mathrm{d}s<0,t\in(0,T)$ 故 $y_\alpha(t)$是严格减函数且 $|y'_\alpha(t)|=-y'_\alpha(t)$. 同样 $y_\beta(t)$ 也是严格减函数且 $|y'_\beta(t)|=-y'_\beta(t)$. 又

$$y'_\alpha(t)-y'_\beta(t)=\int_0^t(\frac{s}{t})^{N-1}[F(s,|y'_\beta(s)|)y_\beta^{-\lambda}(s)-F(s,|y'_\alpha(s)|)y_\alpha^{-\lambda}(s)]\mathrm{d}s,\ t\in[0,T).\tag{9}$$

取定一 $\gamma>0$: $\beta<\gamma<\alpha$. 由于 $y_\alpha(t)$连续且 $y_\alpha(0)=\alpha$,故存在 $t_0>0(0<t_0<T)$使得 $y_\alpha(t)>\gamma,0\leqslant t\leqslant t_0$,进而有

$$F(t,|y'_\beta(t)|)y_\beta^{-\lambda}(t)-F(t,|y'_\alpha(t)|)y_\alpha^{-\lambda}(t)>F(t,0)\beta^{-\lambda}-F(t,|y'_\alpha(t)|)\gamma^{-\lambda},0<t\leqslant t_0.\tag{10}$$

设 $F(0,0)\beta^{-\lambda}-F(0,0)\gamma^{-\lambda}=a>0$. 由 $F(t,|y'_\alpha(t)|)y_\alpha^{-\lambda}(t)$的连续性和 $y'_\alpha(0)=y'_\beta(0)=0$,故存在 $\delta\in(0,t_0]$使得

$$F(t,|y'_\alpha(t)|)\gamma^{-\lambda}<F(0,0)\gamma^{-\lambda}+\frac{a}{2},F(t,0)\beta^{-\lambda}>F(0,0)\beta^{-\lambda}-\frac{a}{2},0<t<\delta.\tag{11}$$

由(10),(11)知

$$F(t,|y'_\beta(t)|)y_\beta^{-\lambda}(t)-F(t,|y'_\alpha(t)|)y_\alpha^{-\lambda}(t)>0,\ 0<t<\delta\leqslant T.\tag{12}$$

由(9),(12)得 $y'_\alpha(t)>y'_\beta(t),0<t<\delta\leqslant T$. 若 $\delta<T$,则存在 δ_1: $\delta<\delta_1<T$ 使得

$$y'_\alpha(t)>y'_\beta(t),0<t<\delta_1;y'_\alpha(\delta_1)=y'_\beta(\delta_1).\tag{13}$$

注意到 $y_\alpha(0)-y_\beta(0)=\alpha-\beta>0,y'_\alpha(t)\leqslant 0,y'_\beta(t)\leqslant 0,0<t<\delta_1$,所以有

$$y_\alpha(t)>y_\beta(t),\ |y'_\alpha(t)|<|y'_\beta(t)|,\ 0<t<\delta_1.\tag{14}$$

从而有 $F(t,|y'_\beta(t)|)y_\beta^{-\lambda}(t)>F(t,|y'_\alpha(t)|)y_\alpha^{-\lambda}(t),0<t<\delta_1$,进而得

$$0=y'_\alpha(\delta_1)-y'_\beta(\delta_1)=\int_0^{\delta_1}(\frac{s}{\delta_1})^{N-1}[F(s,|y'_\beta(s)|)y_\beta^{-\lambda}(s)-F(s,|y'_\alpha(s)|)y_\alpha^{-\lambda}(s)]\mathrm{d}s>0$$

矛盾. 由此知 $y'_\alpha(t)>y'_\beta(t),0<t<T$. 此即(8)式.

(ii) 若 $y_\beta(t)$在$[0,T)$上存在,则 $y_\alpha(t)$也在$[0,T)$上存在. 事实上,若 $y_\alpha(t)$的存在区间小于$[0,T)$(即 $y_\alpha(t)$在 $t=T$ 之前变为零). 由于在原点附近 $y_\alpha(t)>y_\beta(t)$,故曲线 $y_\alpha(t)$与 $y_\beta(t)$必相交,设第一个交点为 $t=\tau<T$,于是 $y_\alpha(t)>y_\beta(t),0\leqslant t<\tau,y_\alpha(\tau)=y_\beta(\tau)$. 由(5),(6),$(F_1)$以及(i)的结论得

$$\begin{aligned}&-y_\alpha(\tau)+\alpha+y_\beta(t)-\beta\\&=\int_0^\tau\int_0^s(\frac{\tau}{s})^{N-1}[F(\tau,|y'_\alpha(\tau)|)y_\alpha^{-\lambda}(t)-F(\tau,|y'_\beta(\tau)|)y_\beta^{-\lambda}(\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant 0.\end{aligned}$$

于是 $y_\beta(\tau)-y_\alpha(\tau)\leqslant\beta-\alpha<0$,矛盾. 故 $y_\alpha(t)$也在$[0,T)$存在.

(iii) (7)式成立. 事实上,由 $y_\alpha(0)-y_\beta(0)=\alpha-\beta>0$,再由(i),(ii)结论即得证.

引理 2 在 F 满足$(F_1)-(F_3)$的假定下,则边值问题(3)—(4)存在唯一正解 $y\in C^2[0,1)\cap C[0,1]$.

证明 定义 $\overline{S}, \underline{S} \subset (0,\infty)$ 如下：

$\overline{S}=\{\alpha>0 \mid y_\alpha(t)$ 在 $[0,1)$ 上存在且满足 $y_\alpha(1)>0\}$；$\underline{S}=\{\alpha>0 \mid y_\alpha(t)$ 在 $t=1$ 之前变为零$\}$

由引理 1 知对 $\forall\ \alpha\in\overline{S}, \forall\ \beta\in\underline{S}$，则 $\alpha>\beta$，故 $\overline{S}\cap\underline{S}=\varnothing$. 下面证明

(i) $\overline{S}$ 非空. 事实上由 (F_2)，任取 $\frac{\alpha_1}{2}>M>1$，那么 α_1 满足

$$\int_0^1\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,d)\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\int_0^1\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,d)\mathrm{d}r\mathrm{d}s<M<\frac{\alpha_1}{2}. \tag{15}$$

上式关于 $d\geqslant 0$ 一致地成立. 断言 $y_{\alpha_1}(t)>\frac{\alpha_1}{2}, t\in[0,1)$. 不然的话，则存在 $t_1\in(0,1)$ 使得

$$y_{\alpha_1}(t)>\frac{\alpha_1}{2}, 0\leqslant t<t_1; y_{\alpha_1}(t_1)=\frac{\alpha_1}{2}. \tag{16}$$

由(5)—(6)有

$$y_{\alpha_1}(t_1)-\alpha_1+\int_0^{t_1}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,|y'_{\alpha_1}(t)|)y_{\alpha_1}^{-\lambda}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s=0,$$

由假设 (F_1) 以及(15)—(16)，记 $d_1=\max\limits_{0\leqslant r\leqslant t_1}|y'_{\alpha_1}(r)|$，则

$$\frac{\alpha_1}{2}=\int_0^{t_1}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,|y'_{\alpha_1}(r)|)y_{\alpha_1}^{-\lambda}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\int_0^{t_1}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,d_1)\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\frac{\alpha_1}{2}$$

矛盾. 故 $y_{\alpha_1}(t)>\frac{\alpha_1}{2}, t\in[0,1)$，因此 $\alpha_1\in\overline{S}$，即 $\overline{S}$ 非空.

(ii) $\underline{S}$ 非空. 设 $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,0)\mathrm{d}r\mathrm{d}s=k$ ($k>0$ 为常数)，任取 $-\alpha'>0$ 满足 $\alpha'<\min\{k,1\}$，那么

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,0)(\alpha')^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>k>\alpha' \tag{17}$$

今断言 $y_{\alpha'}(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 之前变为零. 否则，若 $y_{\alpha'}(t)$ 的变量可延伸到 $t=\frac{1}{2}$，且保持函数的值为正，因为 $y_{\alpha'}(t)\leqslant\alpha', t\in[0,\frac{1}{2}]$，再由(5)—(6)，$(F_1)$ 及(17)得

$$-y_{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\right)=-\alpha'+\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,|y'_{\alpha'}(r)|)y_{\alpha'}^{-\lambda}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$\geqslant-\alpha'+\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,0)(\alpha')^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>0,$$

于是 $y_{\alpha'}(\frac{1}{2})<0$，矛盾. 故 $\alpha'\in\underline{S}$，即 $\underline{S}$ 非空.

(iii) $\inf\overline{S}\in\underline{S}$. 事实上，令 $\alpha_*=\inf\overline{S}$，显然 $\alpha_*\in(0,\infty)$，若 $\alpha_*\in\overline{S}$，则 $y_{\alpha_*}(1)\equiv l>0$，由 (F_3) 知对 $\left(\frac{l}{2}\right)^{\lambda+1}>0$，存在 $\delta_1>0$，任取 t_1 满足 $1-\delta_1<t_1<1$，则有

$$\int_{t_1}^1\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,d)\left(\frac{l}{2}\right)^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\left(\frac{l}{2}\right)^{\lambda+1}\left(\frac{l}{2}\right)^{-\lambda}=\frac{l}{2}. \tag{18}$$

上式关于 $d\geqslant 0$ 一致地成立. 由 $y'_{\alpha_*}(t)<0, 0<t<1$ 知 $y_{\alpha_*}(t_1)>l$，注意到(5)—(6)的解对初值的连续依赖性，那么对充分接近于 α_* 的 $\alpha_0\in(0,\alpha_*)$，y_{α_0} 在 $[0,t_1]$ 有定义且

$$y_{\alpha_0}(t_1)>l. \tag{19}$$

可以断言在 $y_{\alpha_0}(t)$ 的存在区间上必有 $y_{\alpha_0}(t)>\frac{l}{2}$，从而 $y_{\alpha_0}(t)$ 的存在区间为 $[0,1)$. 若断言不真，则存在 $t_2\in(t_1,1)$ 使得

$$y_{\alpha_0}(t)>\frac{l}{2}, t_1\leqslant t<t_2; y_{\alpha_0}(t_2)=\frac{l}{2}. \tag{20}$$

积分(5)式，再由(20)，(19)及(18)得

$$\frac{l}{2}=y_{\alpha_0}(t_2)=y_{\alpha_0}(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,|y_{\alpha_0}(r)|)y_{\alpha_0}^{-\lambda}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$>l-\int_{t_1}^{1}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,d_0)\left(\frac{l}{2}\right)^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>l-\frac{l}{2}=\frac{l}{2}.$$

矛盾. 其中 $d_0=\max\limits_{t_1<r\leqslant t_2}|y'_{\alpha_0}(r)|$. 故 $\alpha_0\in\overline{S}$，这又与 $\alpha_*=\inf\overline{S}$ 的意义抵触，故 $\inf\overline{S}\overline{\in}\overline{S}$.

(iv) $\sup\underline{S}\overline{\in}\underline{S}$. 设 $\alpha^*=\sup\underline{S}\in\underline{S}$，设 $t_1\in(0,1)$ 使 $y_{\alpha^*}(t_1)=0$，任取 $T\in(t_1,1)$ 并固定它，注意到 $\int_{t_1}^{T}\int_{t_1}^{s}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,0)\mathrm{d}r\mathrm{d}s>0$，故存在 $\varepsilon>0$ 充分小使得

$$\int_{t_1}^{T}\int_{t_1}^{s}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,0)\varepsilon^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>\varepsilon. \tag{21}$$

由解对初值的连续依赖性及引理 1，知对充分接近于 α^* 的 $\beta>\alpha^*$，$y_\beta(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上有定义且满足 $0<y_\beta(t_1)<\varepsilon$. 断言 $y_\beta(t)$ 在 $t=T$ 之前变为零. 否则 $y_\beta(t)$ 在 $[0,T]$ 上存在且 $y_\beta(t)>0$，于是有 $0<y_\beta(t)<\varepsilon, t_1\leqslant t\leqslant T$. 积分(5)式，由$(F_1)$，(21)得

$$-y_\beta(T)=-y_\beta(t_1)+\int_{t_1}^{T}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,|y'_\beta(r)|)y_\beta^{-\lambda}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$>-\varepsilon+\int_{t_1}^{T}\int_0^s\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r,0)\varepsilon^{-\lambda}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>-\varepsilon+\varepsilon=0,$$

于是 $y_\beta(T)<0$，矛盾. 故 $\beta\in\underline{S}$，然后这又与 $\alpha^*=\sup\underline{S}$ 的意义抵触，故 $\sup\underline{S}\overline{\in}\underline{S}$.

(v) $\alpha_0\equiv\inf\overline{S}=\sup\underline{S}$. 易见对 $\forall\ \alpha_1\in\overline{S}$，$\forall\ \beta_1\in\underline{S}$，则 $\beta_1<\alpha_1$，故 $\sup\underline{S}\leqslant\inf\overline{S}$. 下面证 $\sup\underline{S}<\inf\overline{S}$ 不成立，否则任取 $\alpha,\beta\in(\sup\underline{S},\inf\overline{S})$ 且设 $\alpha>\beta$，易见 $\alpha,\beta\overline{\in}\overline{S}$，$\alpha,\beta\overline{\in}\underline{S}$，由 $\overline{S}$，$\underline{S}$ 的意义知 $y_\alpha(t)$，$y_\beta(t)$ 都在 $[0,1)$ 上有定义，且 $y_\alpha(1)=y_\beta(1)=0$，由于 $\alpha>\beta$，依引理 1 知

$$y'_\alpha(t)>y'_\beta(t), t\in(0,1),$$

从而 $y_\alpha(t)-y_\beta(t)$ 在 $[0,1]$ 上是严格增函数，故有

$$y_\alpha(1)-y_\beta(1)>y_\alpha(0)-y_\beta(0)=\alpha-\beta>0$$

矛盾，所以 $\sup\underline{S}<\inf\overline{S}$ 不成立. 故 $\alpha_0\equiv\inf\overline{S}=\sup\underline{S}$. 由此知(3)—(4) 有唯一正解

$$y\equiv y_{\alpha_0}\in C^2[0,1)\cap C[0,1].$$

2 主要结果

假定问题(1)—(2)中的 $f(x,p)$ 满足下列条件：

(f_1) $f:B\times R^N\to(0,\infty)$ 是局部 Hölder 连续函数(指数 $\theta\in(0,1)$)且 $f(x,p)$ 关于 p 连续可微；对于每一紧区域 $\Omega\subset B$，则存在常数 ρ_Ω 使得 $|f(x,p)|\leqslant\rho_\Omega(1+|p|^2)$，$x\in\Omega$，$p\in R^N$.

(f_2)　存在 $f_*, f^*:[0,1)\times[0,\infty)\to(0,\infty)$，$f_*, f^*\in C^\theta_{\text{loc}}([0,1)\times[0,\infty))$，$f_*(t,z)$，$f^*(t,z)$ 关于 $z\geqslant 0$ 连续可微，且对每一固定的 $t\in[0,1)$，$f_*(t,z)$，$f^*(t,z)$ 关于 $z\geqslant 0$ 单调增，且满足

$$0<f_*(|x|,|p|)\leqslant f(x,p)\leqslant f^*(|x|,|p|),(x,p)\in B\times R^N. \tag{22}$$

定理　设条件(f_1)，(f_2)成立，以及 f_*, f^*满足条件(F_2)，(F_3)，则奇异边值问题(1)—(2)有正解 $u\in C^2(B)\cap C(\overline{B})$.

证明　考察下列边值问题：

$$\begin{cases}\Delta u+f^*(|x|,|\nabla u|)u^{-\lambda}=0, & x\in B, \quad (23)\\ u=0, & x\in\partial B, \quad (24)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta u+f_*(|x|,0)u^{-\lambda}=0, & x\in B, \quad (25)\\ u=0, & x\in\partial B. \quad (26)\end{cases}$$

由引理 2 知问题(23)—(24)和问题(25)—(26)分别有径向正解 $\overline{u}(|x|)$，$\underline{u}(|x|)\in C^2(B)\cap C(\overline{B})$；注意到 $f_*, f^*\in C^\theta_{\text{loc}}$，故 $\overline{u}, \underline{u}\in C^{2+\theta}(B)\cap C(\overline{B})$. 易见 $\overline{u}, \underline{u}$ 分别是(1)—(2) 的上解、下解. 下面证明 $\overline{u}(|x|)\geqslant\underline{u}(|x|)$，$x\in B$. 由于 $\overline{u}-\underline{u}$满足

$$\Delta(\overline{u}-\underline{u})+f^*(|x|,|\nabla\overline{u}|)\overline{u}^{-\lambda}-f_*(|x|,0)\underline{u}^{-\lambda}=0,\quad x\in B, \tag{27}$$

$$\overline{u}-\underline{u}=0,\quad x\in\partial B. \tag{28}$$

把(27)写成

$$\begin{aligned}\Delta(\overline{u}-\underline{u})&+f^*(|x|,|\nabla\overline{u}|)\overline{u}^{-\lambda}-f_*(|x|,0)\underline{u}^{-\lambda}\\&+f_*(|x|,0)\overline{u}^{-\lambda}-f_*(|x|,0)\overline{u}^{-\lambda}=0,\end{aligned} \tag{29}$$

由(f_2)及(29)得

$$\Delta(\overline{u}-\underline{u})+f_*(|x|,0)\overline{u}^{-\lambda}-f_*(|x|,0)\underline{u}^{-\lambda}\leqslant 0. \tag{30}$$

进而有

$$\Delta(\overline{u}-\underline{u})+c(x)(\overline{u}-\underline{u})\leqslant 0. \tag{31}$$

其中 $c(x)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial u}f_*(|x|,0)u^{-\lambda}\big|_{u=t\overline{u}+(1-t)\underline{u}}\mathrm{d}t=-\lambda f_*(|x|,0)\int_0^1(t\overline{u}+(1-t)\underline{u})^{-(1+\lambda)}\mathrm{d}t\leqslant 0.$
由(31)，(28) 以及弱极大值原理知 $\inf\limits_B(\overline{u}-\underline{u})\geqslant\inf\limits_{\partial B}(\overline{u}-\underline{u})=0$，故

$$\overline{u}(|x|)\geqslant\underline{u}(|x|),\quad x\in B. \tag{32}$$

令 $B_n=\{x\in R^N\,|\,|x|<1-\frac{1}{n}\}$，$n=2,3,\cdots$，任取一函数 $h\in C^{2+\theta}_{\text{loc}}(B)\cap C(\overline{B})$ 且满足 $\underline{u}(|x|)\leqslant h(|x|)\leqslant\overline{u}(|x|)$，$x\in B$，由于 $\overline{u}, \underline{u}$ 分别是(1)，(2)的上解、下解，易见 $\overline{u}, \underline{u}$ 也分别是下列边值问题的上解、下解.

$$\Delta u+f(x,\nabla u)u^{-\lambda}=0,\quad x\in B_n, \tag{33}$$

$$u=h(x),\quad x\in\partial B_n, \tag{34}$$

其中 $n\geqslant 2$，且当 $n\geqslant 2$ 时有 $\overline{u}(|x|)\geqslant\underline{u}(|x|)$，$x\in\overline{B}_n$. 由$(f_1)$以及上面所获得的上解、下解，知当 $n\geqslant 2$ 时边值问题(33)，(34)存在正解 $u_n\in C^{2+\theta}(\overline{B}_n)$（[3]p336 引理 3.1)，且满足

$$\underline{u}(|x|)\leqslant u_n(x)\leqslant\overline{u}(|x|),\quad x\in\overline{B}_n. \tag{35}$$

由[3]p340 引理 3.3 知对固定的整数 $n(n\geqslant 2)$存在常数 $C(n)$使得

$$\|u_j\|_{C^{2+\theta}(\overline{B}_n)}\leqslant C(n),\quad j\geqslant n+1. \tag{36}$$

由于嵌入 $C^{2+\theta}(\overline{B}_n)\to C^2(\overline{B}_n)$是紧的. 按通常取对角线的方法知序列$\{u_n\}$存在子序列$\{u_{n(k)}\}$在球 B 的每一紧子集上依 C^2 的拓扑收敛于某一正的函数 $u_\infty\in C^2$. 容易看到 u_∞满足方程(1),且由(35)看到在 ∂B 上 $u_\infty\equiv 0$,故 u_∞就是(1)—(2)在函数类 $C^2(B)\cap C(\overline{B})$中的正解.

参 考 文 献

1 Usami H. *On a singular elliptic boundary value problem in a ball*. Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 1989, **13**(10): 1163~1170

2 Gilbarg D and Trudinger N S. *Elliptic partial differential equations of second order* 2nd. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg New York Tokyo, 1983.

3 Noussair E S. *On semilinear boundary value problem in unbounded domains*. J. Differential Equations, 1981, **41**: 334~348

4 Adams R A. *Sobolev spaces*. New York San Francisco London, 1975.

Existence of Positive Solutions of a Class of Singular Elliptic Boundary Value Problem

Xu Xingye

(Math. Dept., Guangdong Education College, Guangzhou 510303)

Abstract

We prove the existence of the positive solutions of a class of singular elliptic boundary value problems thus extending the results obtained by H. Usami in 1989[1].

Keywords boundary value problem, positive solutions, supersolutions, subsolutions.