第 19 卷第 1 期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999 年 2 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

# 关于分次环的群环的根的注记*

铁 军

(大连民族学院基础部，大连开发区 116600)

**摘 要** 本文研究了分次环的群环的 Jacobson 根，Brown-MCcoy 根和强素根及其分次根.

**关键词** Jacobson 根，Brown-MCcoy 根，强素根.

**分类号** AMS(1991) 16W/CCL O153.3

## 1 准备知识

设 $G$ 为群，$e$ 为其单位元. 环 $R$ 称为 $G$-分次环，若 $R=\oplus_{g\in G}R_g$ 满足 $R_gR_h\subseteq R_{gh}$，对任 $g,h\in G$. $G$-分次环 $R$ 的理想 $I$ 叫做分次理想，若 $I=\oplus_{g\in G}(R_g\cap I)$ 或等价地，对任 $g\in G$，若 $\sum_{g\in G}r_g\in I$，则 $r_g\in I$ 均成立.

$G$-分次环 $R$ 的所有(分次)本原理想的交叫做 $R$ 的(分次)Jacobson 根，分别记作 $J_G(R)$ 及 $J(R)$，$G$-分次环 $R$ 的所有(分次)极大理想的交叫做 $R$ 的(分次)Brown-MCcoy 根，分别记作 $U_G(R)$ 及 $U(R)$，$G$-分次环 $R$ 的所有(分次)强素理想的交叫做 $R$ 的(分次)强素根，分别记作 $S_G(R)$ 及 $S(R)$.

设 $R[G]=\{\sum_{g\in G}\lambda_g g\mid\lambda\in R\}$，规定 $\lambda_\sigma\tau\cdot\lambda_{\sigma'}\tau'=\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}(\sigma'^{-1}\tau\sigma'\tau')$，$\lambda_\sigma\in R_\sigma$，$\lambda_{\sigma'}\in R_{\sigma'}$，$\tau,\tau',\sigma,\sigma'\in G$，则 $R[G]$ 叫做 $G$-分次环 $R$ 上的群环(见[1]). 令 $R[G]_\sigma=\sum\limits_{\lambda\mu=\sigma}R_\lambda\mu$，则 $R[G]=\oplus_{\sigma\in G}R[G]_\sigma$ 也为 $G$-分次环.

本文涉及到一些特殊的群. 设 $\{G_i\mid i\in I\}$ 是群集，若群 $G$ 同构于直积 $\prod_{i\in I}G_i$ 的某个子群 $H$ 使每个 $H\to G_i$ 的投影是满同态，对任 $i\in I$，则称群 $G$ 为 $\{G_i\mid i\in I\}$ 的次直积. 若群 $G$ 是一些有限 $p$-群的次直积，则群 $G$ 叫做剩余有限 $P$ 一群. 群 $G$ 叫做唯一积群，若对 $G$ 任两个非空子集 $A$、$B$，至少存在一个元 $x\in G$，使 $x$ 有唯一表达式 $x=ab$，其中 $a\in A$，$b\in B$. 另外，群 $G$ 叫做强多无限循环群，若 $G$ 存在一个有限列 $\{e\}=G\subset G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n=G$ 使对任 $i=1,2,\cdots,n$ 都有 $G_i\lhd G$ 且 $G_{i+1}/G_i$ 是无限循环群. 显然，强多无限循环群是唯一积群.

## 2 Jacobson 根与分次 Jacobson 根

**命题 2.1** 设 $R$ 是 $G$-分次环，则 $R[G]_e=\oplus_{g\in G}R_gg^{-1}$ 是 $G$— 分次环且 $R$ 与 $R[G]_e$ 为分

* 1995 年 12 月 27 日收到. 1998 年 3 月 27 日收到修改稿.

次环同构. 若 $R$ 是强 $G$— 分次环, 则 $R[G]_e$ 也是强 $G$— 分次环.

**证明** 令 $(R[G]_e)_g = R_g g^{-1}$, 则 $R[G]_e = \oplus_{g\in G}(R[G]_e)_g = \oplus_{g\in G} R_g g^{-1}$ 对任 $r_h h^{-1} \in R_h h^{-1}$, $r_g g^{-1} \in R_g g^{-1}$, 则有 $(r_g g^{-1})\cdot(r_h h^{-1}) = r_g r_h h^{-1} g^{-1} \subseteq R_{gh}(gh)^{-1}$. 因此, $(R_g g^{-1})\cdot(R_h h^{-1}) \subseteq R_{gh}(gh)^{-1}$, $R[G]_e$ 是 $G$- 分次环.

令 $\varphi: R \to R[G]_e$, $\sum r_g \to \sum r_g g^{-1}$, 则 $\varphi(R_g) = R_g g^{-1}$, $\varphi$ 为 $G$- 分次环同态, 由文[1]中命题 2.1 知, $\varphi$ 是分次环同构, 故若 $R$ 为强 $G$- 分次环, $R[G]_e$ 也是.

**引理** 2.2 设 $R$ 是强 $G$- 分次环, $l(R) = \{R$ 的所有分次理想$\}$, $l(R[G]) = \{R[G]$ 的所有分次理想$\}$, 则分次理想格 $l(R) \cong l(R[G])$.

**证明** 令 $f: l(R) \to l(R[G])$, $I \to I[G]$. 由命题 2.1 知

$$f(I) = I[G] \in l(R[G]),$$

任 $I, J \in l(R)$, 而 $f(I \cap J) = f(I) \cap f(J)$, $f(I + J) = f(I) + f(J)$ 显然成立. 对任 $K \in l(R[G]$, $K \cap R \in l(R)$, 由于 $(K \cap R)[G] \subseteq K$, 对任 $\sum r_\lambda \mu \in K$, $r_\lambda \mu \in K$, $r_\lambda = (\lambda\mu^{-1})\lambda^{-1}\cdot(r_\lambda \mu) \in K \cap R$, 故

$$K \subseteq (K \cap R)[G], K = (K \cap R)[G].$$

显然 $f$ 是双射, 故 $f$ 为格同构.

**引理** 2.3 设 $R$ 是强 $G$- 分次环, $I$ 是 $R$ 的分次多余理想, 则 $I[G]$ 是 $R[G]$ 的分次多余理想.

**证明** 若 $I$ 是 $R$ 的分次多余理想, 设 $K$ 是 $R[G]$ 的分次理想, 且 $I[G] + K = R[G]$. 由引理 2.2 知存在 $R$ 的唯一理想 $J$, 使 $\varphi(J) = J[G] = K$. 而 $I[G] + K = I[G] + J[G] = (I + J)[G] = R[G]$, 再由引理 2.2, $I + J = R$, $J = R$, 故 $I[G]$ 是 $R[G]$ 的分次多余理想.

**定理** 2.4 若 $R$ 为强 $G$- 分次环, 则 $J_G(R[G]) = (J_G(R))[G]$.

**证明** 由引理 2.3 知, $(J_G(R)[G] \subseteq J_G(R[G])$. 反之, 设 $K$ 是 $R[G]$ 的任意分次多余理想, 由引理 2.2 知存在 $R$ 的唯一分次理想 $K$, 使 $K = J[G]$. 对 $R$ 的任意分次理想 $L$, 若 $L + J = R$, 则 $(J + L)[G] = J[G] + L[G] = R[G]$, 故 $L[G] = R[G]$. 再由引理 2.2 知, $L = R$. 由 $L$ 的任意性, $J$ 是 $R$ 的分次多余理想, 由引理 2.2, $J$ 唯一. 故 $J_G(R[G]) \subseteq (J_G(R))[G]$.

**命题** 2.5 设 $R$ 为 $G$- 分次环. 若 $P$ 是 $R[G]$ 的分次本原理想, $|G| < \infty$, 则 $P \cap R$ 是 $R$ 的有限个分次本原理想的交.

**证明** $R[G]/P = \oplus_{g\in G}(R[G]g + P)/P$ 是分次本原环, 而 $(R/P \cap R)[G] = \oplus_{g\in G}(R/P \cap R)[G]g$ 是 $G$- 分次环. 规定后者乘法为

$$(r_\lambda + P \cap R)\mu \cdot (r_g + P \cap R)h = (r_\lambda r_g + P \cap R)\cdot g^{-1}\mu g h, \lambda, \mu, g, h \in G.$$

令 $f: R[G]/P \to (R/P \cap R)[G]$, $\sum r_\lambda \mu + P \to \sum (r_\lambda + P \cap R)\mu$. 对任 $r_\lambda \mu, r_g h \in R[G]$,

$$f((r_\lambda \mu + P)(r_g h + P)) = f(r_\lambda r_g g^{-1}\mu g h + P) = (r_\lambda r_g + P \cap R)\cdot g^{-1}\mu g h$$
$$= f(r_\lambda \mu + P) f(r_g h + P).$$

易知 $f$ 是分次环同构.

若 $P$ 是 $R[G]$ 的分次本原理想, 则存在一个忠实的分次单 $R[G]/P$- 模 $M$. 由 $f$ 是分次环同构知, $M$ 也是分次单 $(R/P \cap R)[G]$- 模, 且是忠实的, 又由文[1]中引理 5.2 知, $M$ 是有限长分次半单 $(R/P \cap R)$- 模, 故 $P \cap R$ 是 $R$ 的有限个分次本原理想的交.

**推论** 2.6 设 $R$ 是强 $G$- 分次环, 且 $|G| < \infty$, 则 $J_G(R[G]) \cap R = J_G(R)$.

**证明** 由命题 2.5 知,$J_G(R) \subseteq J_G(R[G]) \cap R$. 反之,设 $I$ 是 $R$ 的分次本原理想,令

$$f:(R/I)[G] \to R[G]/I[G], \sum_x (\sum_x r_g + I)x \to \sum_{x,g} r_g x + I[G],$$

其中 $x, g \in G, r_g \in R_g$,则 $f$ 是分次环同构,因 $I$ 是 $R$ 的分次本原理想,故存在一个忠实的分次单 $R/I$-模 $M$,使 $M[G]$ 是忠实的分次单 $R[G]/I[G]$-模,故 $I[G]$ 是 $R[G]$ 的分次本原理想,且 $J_G(R[G]) \cap R \subseteq J_G(R)$.

## 3 Brown-MCcoy 根及其分次性

**命题** 3.1 设群 $G$ 是群集 $\{G_i | i \in I\}$ 的一个次直积,$R$ 是 $G$-分次环,则

(1) 若对任 $i \in I$,$U(R[G])$ 是 $R[G]$ 的 $G_i$-分次理想(由投射 $f_i: G \to G_i$),则 $U(R[G]$ 是 $R[G]$ 的 $G$-分次理想.

(2) 若 $G_i (i \in I)$ 是有限群,则对任 $U(R[G])$ 中元 $v = \sum_{\sigma \in G} (\sum_{\sigma = \lambda\mu} r_\lambda \mu)$,存在 $n_v \in N$,使对任 $\sigma \in G$,$n_v(\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) \in U(R[G])$

**证明** 设 $v = \sum_{\sigma \in G} (\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) \in U(R[G])$,令

$$\mathrm{Supp} v = \{\sigma \in G \mid \sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu \neq 0\}, l(v) = |\mathrm{Supp} v|.$$

下面对 $l(v)$ 用数学归纳法同时证明(1) 和(2).

当 $l(v) = 1$ 时,$v = \sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu \in R[G]_\sigma, \sigma \in G$,结论显然成立. 假设 $l(v) < n$ 时,结论成立. 则当 $l(v) = n$ 时,$l(v) \geqslant 2$. 故存在 $x, y \in \mathrm{Supp} v$ 及 $i \in I$,使 $x \neq y$ 且 $f_i(x) \neq f_i(y)$. 因此 $v = b + c$,其中 $b, c \in R[G])$ 且 $l(b) < n, l(c) < n$.

当(1) 的条件成立时,$b, c \in U(R[G])$. 因为 $l(b) < n, l(c) < n$,故由假设知,对任 $\sigma \in G$,$b_\sigma, c_\sigma \in U(R[G]$,$\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu = b_\sigma + C_\sigma \in U(R[G])$,当(2) 的条件成立时,令 $m = |G_i|, i \in I$. 由文[2] 命题 3 知,$mb, mc \in U(R[G])$,又因 $l(mb) < n, l(mc) < n$,故由假设知,存在 $l, s \in N$,使 $lmb_\sigma \in U(R[G]$,$smc_\sigma \in U(R[G])$,取 $n_v = lsm$,则对任 $\sigma \in G$,

$$n_v(\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) = n_v b_\sigma + n_v c_\sigma \in U(R[G]).$$

**定理** 3.2 设 $R$ 是 $G$-分次环,若存在两个素数集 $\pi_1, \pi_2$,且 $\pi_1 \cap \pi_2 = \varphi$,使 $G$ 是剩余 $\pi_i$-群,$i = 1, 2$,则 $U(R[G])$ 是 $R[G]$ 的分次理想.

**证明** 对任 $v = \sum_{\sigma \in G} (\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) \in U(R[G])$,由命题 3.1(2) 知,存在 $n_i \in \pi_i$ 使 $n_i(\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) \in U(R[G])$,$i = 1, 2$. 又因 $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$,$(n_1, n_2) = 1$,则存在 $a, b, \in N$,使 $an_1 + bn_2 = 1$,故

$$\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu = (an_1 + bn_2) \sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu = an_1(\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) + bn_2(\sum_{\sigma=\lambda\mu} r_\lambda \mu) \in U(R[G]).$$

**推论** 3.3 设 $R$ 是 $G$-分次环,则当 $G$ 是有限生成无扭幂零群或自由可解群时,$U(R[G])$ 是 $R[G]$ 的分次理想.

**证明** 由定理 3.2 知,对两个不同素数 $p_1, p_2$,当 $G$ 是剩余有限 $p_i$-群,$i = 1, 2$ 时,$U(R[G])$ 是 $R[G]$ 的分次理想. 因此,只需证明有限生成无扭幂零群及自由可解群对任意素数 $p$,均为剩余有限 $p$-群,而这是显然的.

## 4　强素根及分次强素根

**定理** 4.1　设 $R$ 是强 $G$-分次环，$G$ 是强多无限循环群，若 $R$ 是 Noether 环，则

(1)　$s_G(R[G]) = s(R[G]) = s(R)R[G]$;

(2)　$s(R[G]_e) = s_G(R[G]_e)$;

(3)　若 $R$ 是强素环，则 $R[G]$ 也是强素环.

**证明**　(1) 在已知条件下，由文[1]中定理 3.1 知，下列条件等价：

(a) $R$ 是 Noether 环；(b) $R$ 是 $G$-分次 Noether 环；(c) $R_e$ 是 Noether 环.

而强多无限循环群 $G$ 是唯一积群，故由文[3]定理 2.1 知，$s(R[G]) = s(R)R[G]$. 因此，$s(R[G])$ 为 $R[G]$ 的分次理想，$s(R[G]) = s_G(R[G])$，结论(2)和(3)是结论(1)及命题 2.1 的直接推论.

**引理** 4.2　设 $R$ 是 $G$-分次环，$G$ 是有限 Abel 群，若 $R[G]$ 是素环且 $P$ 是 $R$ 的极小素理想，则 $R[G]$ 是强素环当且仅当 $P$ 是 $R$ 的一个强素理想.

**证明**　对任 $g, h \in R, r_h \in R_h, g^{-1}r_hg = r_hh^{-1}g^{-1}hg = r_h$，即 $r_hg = gr_h$. 因此，$R[G]$ 是 $R$ 的一个有限正规扩张. 由文[4]中定理 4.1 知结论成立.

**定理** 4.3　设 $R$ 是 $G$-分次环，$G$ 是有限 Abel 群，则 $s(R) = s(R[G]) \cap R$

**证明**　因为 $R[G]$ 是 $R$ 的一个有限正规扩张，由引理 4.6 及文[4]中推论 4.2 知，结论成立.

## 参　考　文　献


1　Nastasescu C. *Group rings of graded rings: applications*. J. Pure Appl. Algebra, 1984, **33**: 313～315

2　Jespers E, Puczylowski E R. *The Jacobson and Brown-MCcoy radicals of Rings Graded by Free Groups*. Gomm. Alg., 1991, **19**(2): 551～558

3　Jespers E. *On radicals of graded rings and applications to semigronp rings*. Comm. Alg., 1992, **20**(3): 2457～2472

4　Permenter M, Passman D, Stewart P. *The strongly prime radical of crossed products*. Comm. Alg., 1984, **12**(9): 1099～1113


# A Note on the Radicals of Group Rings of Graded Rings


*Tie Jun*

(Dalian Institute for Nationalities, 116600)



**Abstract**

We study the Jacobson, Brown-MCcoy and strongly prime radicals and their graded radials of group rings of graded rings.



**Keywords**　Jacobson radical, Brown-MCcoy radical, strongly prime radical.