第19卷第2期 数学研究与评论 Vol.19 No.2
1999年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1999

一类超临界椭圆方程正解的存在性*

赵培浩 王栋
(兰州大学物理系、数学系, 730000) (空军第五飞行学院理训部)

摘 要: 本文讨论了球上半线性椭圆Dirichlet问题 $\Delta u+\lambda u^q+u^p=0$ 正解的存在性, 其中, $\lambda\in R$, $0<q<1$, $p>p_c\equiv\frac{N+2}{N-2}(N>2)$. 在条件 $N\le 6$ 或 $N>6$, $p<p_N\equiv(N+1-\sqrt{2N-3})/(N-3-\sqrt{2N-3})$ 下, 证明了存在唯一的 λ_0, $\lambda_0>0$, 当 $\lambda=\lambda_0$ 时, 有唯一的径向奇异解及无穷多个正解。

关键词: 半线性椭圆方程, 分歧, 超临界Sobolev指数
分类号: AMS(1991) 35J65/CLC O174.1
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)02-0391-10

1 引言及主要结果

考虑椭圆问题

$$
(\mathrm{P})\quad\begin{cases}\Delta u+\lambda u^q+u^p=0, & x\in\Omega,\\ u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}
$$

其中 Ω 是 R^N $(N>2)$ 中具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域, $\lambda\in R$ 是参数, $0<q<1$, $p>1$. 最近, A. Ambrosetti, H. Brezis 及 G. Cerami[1]证明了, 存在正常数 Λ, 当 $\lambda\notin[0,\Lambda)$ 时, 问题(P)无解, 而当 $\lambda\in(0,\Lambda)$ 时, 至少有一极小解. 如果还有 $p\le p_c\equiv\frac{N+2}{N-2}$, 则至少还有一个解, 其中 p_c 是临界Sobolev指数. 更早的时候, 对 $\Omega=B$, B 是单位球的情况, 此问题在[2,3]已有讨论. C. Budd 和 J. Norbury[2]证明了若 $N=3$, $q=1$, $p>5$, 则存在唯一的 λ_0, $0<\lambda_0<\lambda_1$, 使问题(P)有唯一的径向奇异解及无穷多个正解, 其中 λ_1 是 $-\Delta$ 在球上具零边值的第一特征值, F. Merle 和 L. A. Peletier[3]证明了 $N>2$, $q=1$, $p>p_c$ 时, 存在唯一的 λ_0, $0<\lambda_0<\lambda_1$, 使问题(P)有唯一的径向奇异解, 但没有得到多解. 由余庆余和马天[4]得到的一个大范围分歧定理得知, $(0,0)$ 是问题(P)的唯一的正解分歧点($p\ge p_c$), 且由此发出的解分支 (λ,u) 在 $R\times C(B)$ 中无界, 利用这个结果, 本文推广了[2,3], 对 $0<q<1$, $N>2$, $p>p_c$, 得到了类似于[2]的结论.

* 收稿日期: 1996-05-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19671040)
作者简介: 赵培浩(1964-), 男, 甘肃宁县人, 博士, 现在兰州大学理论物理博士后流动站工作. 主要研究方向为非线性泛函分析及应用, 无穷维动力系统.

设 $\Omega = B$，由[5]，知问题(P)的正解均是径向对称的．令 $u(r) = \lambda^{\frac{1}{p-q}}\hat{u}(s)$，$s = \mu^{\frac{1}{2}} r$，$\mu = \lambda^{\frac{p-1}{p-q}}$，则问题(P)转化为如下的初值问题

$$\hat{u}_{ss} + \frac{N-1}{s}\hat{u}_s + \hat{u}^q + \hat{u}^p = 0, \quad s > 0, \tag{1.1}$$

$$\hat{u}(0) = \theta, \quad \hat{u}_s(0) = 0, \tag{1.2}$$

其中选取 θ 使得 $u(1) = 0$．由[4]，知对任意的 θ，(1.1)，(1.2)均有解 $\hat{u}$ 使得 u 是(P)之解，且 $u(1) = 0$．

以下均设 $p > p_c \equiv \frac{N+2}{N-2}$ $(N > 2)$.

记 $\alpha = \frac{2}{p-1}$，$k^{p-1} = \alpha(N-2-\alpha)$；记 $M(s)$ 是(1.1)的满足奇异初值条件(1.3)之解

$$s^{\alpha} M(s) \to K, \quad s^{\alpha+1} M_s(s) \to -\alpha K, \text{ 当 } s \to 0 \text{ 时}. \tag{1.3}$$

本文的主要结果是

定理1.1　设 $N \leq 6$ 或 $N > 6$，$p < p_N \equiv \frac{N+1-\sqrt{2N-3}}{N-3-\sqrt{2N-3}}$，定义 $\omega^2 = p\alpha(N-2-\alpha) - \frac{1}{4}(N-2)^2$，$\theta_*(\tau) = \theta_0 \exp\left(\frac{\alpha}{\omega}\tau\right)$，其中 θ_0 只与 p 有关，则对足够大的 τ，有 $\hat{u}(s)$ 满足(1.1)，(1.2)并且

$$\hat{u}(0) = \theta = \theta_*(\tau)\left[1 + O\left(\theta_*(\tau)^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}m}\right)\right]$$

$$\mu = \mu_c + E\theta_*(\tau)^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}} \sin\tau \left[1 + O\left(\theta_*(\tau)^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}m}\right)\right].$$

其中 $m > 0$，E 是与 p 有关的常数，μ_c 是 $M(s)$ 的第一个零点，而 μ 是 $\hat{u}$ 的第一个零点．

定理1.2　对 $n = 1, 2, \cdots$，存在 $\theta_n \to \infty$，对应的解列 $\hat{u}_n \in C^2[0, \mu_c]$，使得 $\hat{u}_n(0) = \theta_n$，$\hat{u}_n(\mu_c) = 0$ 且 $\hat{u}_n(s) > 0$ 对 $s \in [0, \mu_c)$，并且 $\int_0^{\mu_c}\left[\frac{d}{ds}(\hat{u}_n(s) - M(s))\right]^2 s^{N-1} ds \to 0 \, (n \to \infty)$.

2　关于方程 $\omega_{ss} + \frac{N-1}{s}\omega_s + \omega^p = 0$

考察问题

$$\begin{cases} \omega_{ss} + \frac{N-1}{s}\omega_s + \omega^p = 0, & s > 0, \\ \omega(0) = \theta, \quad \omega_s(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

记(2.1)之解为 $\omega(\theta, s)$，众所周知，(2.1)之解具有如下的群关系

$$\omega(\theta, s) = \theta\omega(1, \theta^{\frac{p-1}{2}} s). \tag{2.2}$$

令 $a = s^{\alpha}\omega(1, s)$，$b = s^{1+\alpha}\omega_s(1, s)$，$s = e^t$．(2.1)转化为

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \alpha a + b, \\ \frac{db}{dt} = (\alpha - 1)b - a^p. \end{cases} \tag{2.3}$$

由[2]，容易证明

引理2.1 若$(a(t), b(t))$是(2.3)的解轨道, 则当t趋于无穷时, 有

$$a(t)-K\to 0,\ b(t)+\alpha K\to 0.$$

令$\varphi(s)=\omega(1,s)-Ks^{-\alpha}$. 对$\varphi$有

引理2.2 存在s_*足够大, 使当$s\geq s_*$时, 有

$$\varphi^{(n)}(s)=[Cs^{-\frac{N-2}{2}}\sin(\omega\ln s+D)]^{(n)}+A_n(s)s^{-(n+N-2-\alpha)},$$

其中$A_n(s)$是有界连续函数, C, D均是常数.

证明 由$\omega(1,s)$满足(2.1)知

$$L\varphi\equiv\varphi_{ss}+\frac{N-1}{s}\varphi_s+\frac{p\alpha}{s^2}(N-2-\alpha)\varphi=\varphi^2 f(\varphi,s)s^{-(p-2)\alpha}, \tag{2.4}$$

其中$f(\varphi,s)=\varphi^{-2}s^{(p-2)\alpha}[(Ks^{-\alpha}+\varphi)^p-K^ps^{-p\alpha}-pK^{p-1}s^{-2}\varphi]$. 线性方程$L\varphi=0$有两个线性无关的解$\varphi_1=s^{-\frac{N-2}{2}}\sin(\overline{\omega}\ln s)$, $\varphi_2=s^{-\frac{N-2}{2}}\cos(\overline{\omega}\ln s)$. 由常数变易法知(2.4)之解

$$\varphi(s)=Cs^{-\frac{N-2}{2}}\sin(\overline{\omega}\ln s+D)+s^{-\frac{N-2}{2}}\int_s^\infty\frac{t^{\frac{N}{2}}}{\overline{\omega}}\sin(\overline{\omega}\ln\frac{t}{s})\varphi^2(t)t^{-(p-2)\alpha}f(\varphi(t),t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

其中C, D是常数. 令$\psi(s)=s^{\frac{N-2}{2}}\varphi(s)$, $g(\psi,s)=f(s^{-\frac{N-2}{2}}\psi,s)$. 则$\psi(s)$满足

$$\varphi(s)=N\psi(s)\equiv C\sin(\overline{\omega}\ln s+D)+\int_s^\infty\frac{t^{2-\frac{N}{2}}}{\overline{\omega}}\sin(\omega\ln\frac{t}{s})\psi^2(s)t^{-(p-2)\alpha}g(\psi(s),t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

以下证明, 存在s_*足够大, 使$N: B_*\to B_*$是压缩算子, 其中

$$B_*=\{\psi\in C_{[s_*,\infty)}\ |\ \|\psi\|\equiv\sup_{s_*<s<\infty}|\psi(s)|\leq 2C\}.$$

设$|\psi|<2C$, 则$|\varphi|<2Cs^{-\frac{N-2}{2}}$, 注意到$p>p_c$时, $\alpha<\frac{N-2}{2}$, 故当$s\geq 1$时, 有$|\varphi|<Hs^{-\alpha}$, 由此可知$|f(\psi,s)|$及$|g(\psi,s)|$有上界$G(s\geq 1)$, 且若$s>1$, 还有

$$|\psi_1^2 g(\psi_1,s)-\psi_2^2 g(\psi_2,s)|\leq 2G\cdot 2C|\psi_1-\psi_2|.$$

对任意的$\psi_1,\psi_2\in B_*$成立, 从而

$$\left|\int_s^\infty\frac{t^{\frac{4-N}{2}}}{\overline{\omega}}\sin(\overline{\omega}\ln\frac{t}{s})\psi^2(s)t^{-(p-2)\alpha}g(\psi(t),t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq\frac{G}{\overline{\omega}}\|\psi\|^2\int_s^\infty t^{\frac{4-N}{2}-(p-2)\alpha}\mathrm{d}t=\frac{G\cdot\|\psi\|^2}{[\frac{N}{2}-(1+\alpha)]\overline{\omega}}s^{1+\alpha-\frac{N}{2}}.$$

故当$s\geq 1$时, 由$\alpha<\frac{N}{2}-1$, 及

$$|N\psi_1-N\psi_2|\leq B\|\psi_1-\psi_2\|s^{1+\alpha-\frac{N}{2}}$$

知存在s_*足够大, 当$s>s_*$时N是B_*上的压缩算子. 定义$\psi_0=C\sin(\overline{\omega}\ln s+D)$, $\psi_{n+1}=N\psi_n$, $n\geq 0$, 由压缩原理知此迭代收敛到唯一的解$\psi(s)\in B_*$. 重复微分(2.5). 引理得证.

上引理中C, D由初始条件$\omega(\theta,0)=\theta$, $\omega_s(\theta,0)=0$所确定, 为了D的唯一性, 规定$D\in(0,2\pi]$.

当$s\geq s_*\theta^{\frac{p-1}{2}}$时, $\omega(\theta,s)$的行为可由$\omega(1,s)$通过关系(2.2)推出, 特别对大的θ, 当$s<1$时, 不难得到

引理2.3 (1) 当 $s\theta^{\frac{p-1}{2}}\to\infty$ 时, $s^{\alpha}\omega(\theta,s)-K\to 0$, $s^{1+\alpha}\omega_s(\theta,s)+\alpha K\to 0$;

(2) 对所有 $s>0$, 存在常数 P,Q 与 θ 无关, 使得

$$0<\omega(\theta,s)<Ps^{-\alpha},\quad 0<-\omega_s(\theta,s)<Qs^{-(1+\alpha)}. \tag{2.7}$$

引理2.4 对 $s\theta^{\frac{p-1}{2}}\ge s_*$. (2.1)之解 $\omega(\theta,s)$ 满足

(1) $$\omega(\theta,s)=Ks^{-\alpha}+Cs^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{1-\frac{N-2}{2\alpha}}\sin\left(\bar{\omega}\ln\left(s\theta^{\frac{p-1}{2}}\right)+D\right)+B_0(s)s^{-(N-2-\alpha)}\theta^{2-\frac{N-2}{\alpha}},$$

$$\frac{\partial^n\omega(\theta,s)}{\partial\theta^n}=\frac{\partial^n}{\partial\theta^n}\left\{Cs^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{1-\frac{N-2}{2\alpha}}\sin\left(\bar{\omega}\ln\left(s\theta^{\frac{p-1}{2}}\right)+D\right)\right\}+B_n(s)s^{-(N-2-\alpha)}\theta^{2-n-\frac{N-2}{\alpha}},$$

$n=1,2$;

(2) $$\omega_s(\theta,s)=Ks^{-(1+\alpha)}+Cs^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{1-\frac{N-2}{2\alpha}}\sin\left(\bar{\omega}\ln\left(s\theta^{\frac{p-1}{2}}\right)+D\right)+C_0(s)s^{-(N-1-\alpha)}\theta^{2-\frac{N-2}{\alpha}},$$

$$\frac{\partial^n}{\partial\theta^n}\omega_s(\theta,s)=\frac{\partial^{n+1}}{\partial\theta^n\partial s}\left\{Cs^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{1-\frac{N-2}{2\alpha}}\sin\left(\bar{\omega}\ln\left(s\theta^{\frac{p-1}{2}}\right)+D\right)\right\}+C_n(s)s^{-(N-1-\alpha)}\theta^{2-n-\frac{N-2}{\alpha}},$$

$n=1,2$

其中 $B_i(s),C_i(s)$ $(i=0,1,2)$ 当 $s\theta^{\frac{p-1}{2}}\ge s_*$ 时是 s 的有界函数且其界与 θ 无关

3 $\hat{u}$ 在原点附近的行为

在原点附近, 将 $\hat{u}$ 视为 $\omega(\theta,s)$ 的扰动, 有

引理3.1 定义 $x(s)=\hat{u}(s)-\omega(\theta,s)$. 则存在函数 $\gamma(M,s)=p[K+\epsilon(M)]^{p-1}+s^2$, 这里 $\epsilon(M)$ 与 θ 无关, 且 $\lim\limits_{M\to\infty}\epsilon(M)=0$, 当 $s^{\alpha}<\theta^{\frac{-\gamma}{2+\gamma}}\equiv\theta^{n-1}$ 时, 有

$$|x(s)|\le 2\exp\left(\frac{pM^2}{N-2}\right)\left(\frac{s\theta^{\frac{p-1}{2}}}{M}\right)^{\gamma}Rs^{2-\alpha},$$

其中 R 是与 M,θ 无关的常数

证明 (1.1), (1.2)及(2.1)之解也是Volterra积分方程

$$\hat{u}(s)=\theta+V(\hat{u}^q+\hat{u}^p) \tag{3.1}$$

及

$$\omega(s)=\theta+V(\omega^p) \tag{3.2}$$

的连续解, 其中 V 是Volterra积分算子

$$V(f)(s)=\frac{1}{N-2}\int t^{N-1}\left(\frac{1}{s^{N-2}}-\frac{1}{t^{N-2}}\right)f(t)\,\mathrm{d}t$$

对 $x(s)=\hat{u}(s)-\omega(\theta,s)$, 有

$$Lx\equiv[I-V(1+p\omega^{p-1}(\theta,s))]x=V\omega(\theta,s)+VT(x), \tag{3.3}$$

其中 $T(x)=(\omega+x)^p-\omega^p-p\omega^{p-1}x+(\omega+x)^q-(\omega+x)$.

先证关于 L 的下述引理, 然后再完成引理3.1的证明

引理3.2 L 有逆 $\Gamma: C_{(0,s)}\to C_{(0,s)}$. 进一步, 有函数 $\gamma(M)$, 使得

(1) 当 $s\le M\theta^{-\frac{p-1}{2}}$ 时, $|\Gamma f(s)|\le\exp\left(\frac{pM^2}{N-2}\right)\sup f$;

(2) 当 $s > M\theta^{-\frac{p-1}{2}}$ 时，$\left|\Gamma f(s)\right| \leq \exp\left(\frac{pM^2}{N-2}\right)\left(\frac{s\theta^{\frac{p-1}{2}}}{M}\right)^{\gamma}\sup f$.

证明 令

$$\Gamma \equiv L^{-1} = I + Z + Z^2 + \cdots, \tag{3.4}$$

其中 $Zf(s) = V(1 + p\omega^{p-1}(\theta, s))f(s)$. 注意到总有 $\omega(\theta, s) < \theta(s > 0)$，同时存在与 θ 无关的函数 $\epsilon(M)$，$\lim_{M\to\infty}\epsilon(M) = 0$，使 $\left|\omega(\theta, s)\right| \leq [K + \epsilon(M)]s^{-\alpha}(s > M\theta^{-\frac{p-1}{2}})$. 故

$$\left|Zf(s)\right| \leq \frac{p\theta^{p-1}}{N-2}\int^{M\theta^{-\frac{p-1}{2}}}\left|f(t)\right|\mathrm{d}(t^2) + \frac{\gamma(M)}{N-2}\int_{M\theta^{-\frac{p-1}{2}}}\left|f(t)\right|\mathrm{d}\left(\ln\frac{t\theta^{\frac{p-1}{2}}}{M}\right), \tag{3.5}$$

其中 $\gamma(M)$ 由下列估计得到

$$s^2\left|1 + p\omega^{p-1}(\theta, s)\right| \leq s^2 + p(K + \epsilon(M))^{p-1} \equiv \gamma(M).$$

由(3.5)，可得当 $s \leq M\theta^{-\frac{p-1}{2}}$ 时，

$$\left|Z^n f(s)\right| < \sup f\left(\frac{p\theta^{p-1}s^2}{N-2}\right)^n\frac{1}{n!}. \tag{3.6}$$

当 $s > M\theta^{-\frac{p-1}{2}}$ 时，

$$\left|Z^n f(s)\right| < \sup f\sum_{m=0}^{n}\frac{\beta^m}{m!}\frac{\delta^{n-m}}{(n-m)!}, \tag{3.7}$$

其中 $\beta = \frac{pM^2}{N-2}$，$\delta = \frac{\gamma(M)}{N-2}\ln(s\theta^{\frac{p-1}{2}})$. 由 $\left|\Gamma f(s)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|Z^n f(s)\right|$ 及 $\left|Z^n f(s)\right|$ 之界，引理3.2得证

由 Γ 的性质，可将(3.3)写为

$$x = Y(x) \equiv \Gamma V\omega(\theta, s) + \Gamma VT(x).$$

V 是核有界的 Volterra 积分算子，Γ 有界线性，故 Y 是映 $C_{(0,s)}$ 到自身的紧算子，由 $\omega(\theta, s)$ 的界，易得

$$\left|V\omega(\theta, s)\right| \leq Rs^{2-\alpha}. \tag{3.8}$$

设 x 满足

$$\left|x(s)\right| < Ps^{-\alpha}, \tag{3.9}$$

易证

$$\left|VT(x)\right| \leq Qs^{2-\alpha}. \tag{3.10}$$

设 $s^{\alpha} < \theta^{n-1}$. 令

$$B = \{x \in C_{(0,s)}: \sup_{0<t<s}\left|x(t)\right| \leq 2\exp\left(\frac{pM^2}{N-2}\right)\left(\frac{s\theta^{\frac{p-1}{2}}}{M}\right)^{\gamma}Rs^{2-\alpha}\}.$$

注意到 B 中元素均满足(3.9). 从而易证 Y 映球 B 到自身，由 Schauder 不动点定理，知 Y 在 B 中有不动点 x，引理3.1证毕

由引理3.1中给出的界，当 $s^{\alpha} \ll \theta^{n-1}$ 时，可将 $\frac{\partial\hat{u}}{\partial\theta}, \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\theta^2}$ 作为 $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}, \frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}$ 的扰动来研究，有

引理3.3 设 $s^{\alpha} \ll \theta^{n-1}$，有

(1) $\left|\frac{\partial\hat{u}}{\partial\theta} - \frac{\partial\omega(\theta, s)}{\partial\theta}\right| \ll s^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{-\frac{N-2}{2\alpha}}$,

(2) $\left|\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial\theta}-\frac{\partial\omega_s(\theta,s)}{\partial\theta}\right|\ll s^{-\frac{N}{2}}\theta^{-\frac{N-2}{2\alpha}}$,

(3) $\left|\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\omega(\theta,s)}{\partial\theta^2}\right|\ll s^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}}$,

(4) $\left|\frac{\partial^2\hat{u}_s}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\omega_s(\theta,s)}{\partial\theta^2}\right|\ll s^{-\frac{N}{2}}\theta^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}}$.

证明 将(3.1), (3.2)对 θ 微分, 定义 $y(s)=\frac{\partial\hat{u}}{\partial\theta}-\frac{\partial\omega(\theta,s)}{\partial\theta}$, 则 y 满足

$$\hat{L}y\equiv[I-V(q\hat{u}^{q-1}+p\hat{u}^{p-1})]y=V[q\hat{u}^{q-1}+p(\hat{u}^{p-1}-\omega^{p-1}(\theta,s)]\frac{\partial\omega(\theta,s)}{\partial\theta}.\tag{3.11}$$

由极值原理, 若 $\hat{u}(s)>0$, 则 $\hat{u}(s)<\omega(\theta,s)$, 故有关 L^{-1} 的估计关于 $\hat{L}^{-1}$ 也成立, 记 $\hat{\Gamma}=\hat{L}^{-1}$, 有

$$y=\hat{\Gamma}V[q\hat{u}^{q-1}+p(\hat{u}^{p-1}-\omega(\theta,s)^{p-1})]\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(\theta,s).\tag{3.12}$$

将(2.2)对 θ 微分, 有

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(\theta,s)=\omega(1,s\theta^{\frac{p-1}{2}})+\frac{p-1}{2}\theta^{\frac{p-1}{2}}\omega_s(1,s\theta^{\frac{p-1}{2}}),$$

从而存在与 θ 无关的常数 T, 使得

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(\theta,s)\right|<T\theta^{-1}s^{-\alpha}.\tag{3.13}$$

由引理2.4, 对所有 $\epsilon>0$, 存在 $N(\epsilon)$ 与 θ 无关, 当 $s>N(\epsilon)\theta^{-\frac{p-1}{2}}$ 时,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(\theta,s)\right|<(C+\epsilon)s^{-\frac{N-2}{2}}\theta^{-\frac{N-2}{2\alpha}}\left(\frac{p-1}{2}\overline{\omega}+\frac{N-2}{2\alpha}-1\right).\tag{3.14}$$

由引理3.1, 有

$$\left|p(\hat{u}^{p-1}-\omega(\theta,s)^{p-1})\right|<K_1s^{2-\alpha}s^{-(p-2)\alpha}(s\theta^{\frac{p-1}{2}})^{\gamma},\tag{3.15}$$

其中 K_1 与 θ 无关, 将(3.14), (3.15)代入(3.12)可得(1), 将(3.12)对 s 求导易得(2), 同理, 由对 $\frac{\partial^2\omega(\theta,s)}{\partial\theta^2}$ 的相应估计, 可得(3), (4). □

4 离开原点时 $\hat{u}$ 的行为

[3]的结果不难推广到 $0<q<1$ 的情况. 故(1.1)有奇异解 $M(s)$ 满足奇异初值条件(1.3). 在上节讨论了当 $s^{\alpha}\ll\theta^{m-1}$ 时 $\hat{u}$ 与 $\omega(\theta,s)$ 之差异. 本节将在 s 离开原点时讨论 $\hat{u}(s)$ 与 $M(s)$ 之差别. 令 $y(s)=\hat{u}(s)-M(s)$, 则 y 满足

$$\tilde{L}y\equiv y_{ss}+\frac{N-1}{s}y_s+\frac{p\alpha}{s^2}(N-2-\alpha)y+\overline{N}(s)y=y^2\hat{N}(s),\tag{4.1}$$

其中

$$\overline{N}(s)=pM(s)^{p-1}-p\alpha(N-2-\alpha)s^2+[(y(s)+M(s))^q-M^q(s)]/y,$$

$$-\hat{N}(s)=[(y(s)+M(s))^p-M^p(s)-pM^{p-1}(s)y]/y^2.$$

引理4.1 设 $\tilde{L}\varphi=0$ 的两个线性无关解为 φ_i, $i=1,2$, 则当 $s\to0$ 时, 有

$$\varphi_i(s) = s^{-\frac{N-2}{2}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\overline{\omega}\ln s)(1+O(s^2)),$$
$$[\varphi_i(s)]_s = [s^{-\frac{N-2}{2}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\overline{\omega}\ln s)]_s + O(s^{2-\frac{N}{2}}). \tag{4.2}$$

证明 由$\tilde{L}\varphi = L\varphi + \overline{N}(s)\varphi$, 记$\psi(s) = s^{\frac{N-2}{2}}\varphi(s)$. 有

$$\psi(s) = A\sin(\overline{\omega}\ln s + B) - \int^c \frac{t}{\overline{\omega}}\sin(\overline{\omega}\ln\frac{t}{s})\psi(t)\overline{N}(t)\,dt$$

假设$\int^c s|\psi(s)|ds$存在, 上式可写为

$$\tilde{\tilde{L}}\psi \equiv \psi(s) - \int \frac{t}{\overline{\omega}}\sin(\overline{\omega}\ln\frac{t}{s})\psi(t)\overline{N}(t)\,dt = C\sin(\overline{\omega}\ln s + D). \tag{4.3}$$

注意到当$s<\frac{\mu_c}{2}$时, $(y(s)+M(s))^{q-1}$对任意的$y(s)$有界. $y\geq 0$, 故此时$\overline{N}(s)$有界, 从而可得$\tilde{\tilde{L}}$有有界逆, 故$s\to 0$时, $\psi(s) = C\sin(\overline{\omega}\ln s + D)(1+O(s^2))$.

适当选取C, D, 可得$\varphi_i = s^{-\frac{N-2}{2}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\overline{\omega}\ln s)(1+O(s^2))$. 微分(4.3)可得

$$[\varphi_i(s)]_s = [s^{-\frac{N-2}{2}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\overline{\omega}\ln s)]_s + O(s^{2-\frac{N}{2}}).$$ □

本节的主要结果是

引理4.2 设a, b满足$a^2+b^2=1$, 对$s^{\alpha} > \epsilon^{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}$, 方程(4.1)有解$y(s)$满足

$$y(s) = \epsilon[a\varphi_1(s) + b\varphi_2(s)] + A(\epsilon, s)\epsilon^2 s^{2-N+\alpha},$$
$$y_s(s) = \epsilon[a\varphi_1(s) + b\varphi_2(s)]_s + B(\epsilon, s)\epsilon^2 s^{1-N+\alpha}. \tag{4.4}$$

其中$A(\epsilon, s), B(\epsilon, s)$是其界只依赖于$p$的有界函数

证明 令$x(s) = s^{\frac{N-2}{2}}y(s)$, $\psi_i(s) = s^{\frac{N-2}{2}}\varphi_i(s)$, $i=1,2$, 则

$$x(s) = Fx(s) \equiv \epsilon[a\psi_1(s) + b\psi_2(s)] + \int^c \frac{t^{2-\frac{N}{2}}}{\overline{\omega}}\sin(\overline{\omega}\ln\frac{t}{s})(1+O(t^2))x^2(t)\hat{N}(t)\,dt \tag{4.5}$$

由引理5.1, ψ_1, ψ_2在$s=0$附近有界, 从而它在$0\leq s\leq \mu_c$上有上界N. 如果说F是B上的压缩映象, 其中$B = \{x\in C_{[s_*, \mu_c]}: \sup_{s_*<s<\mu_c}|x(s)|<3N\epsilon\}, s_*^{\alpha} > K_2\epsilon^{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}$. 事实上, 注意到$|\hat{N}(t)|<(1+M(t))^{p-2}$且有常数$D$, 使得

$$\int^c t^{2-\frac{N}{2}}t^{-(p-2)\alpha}dt \leq D\,t^{\frac{2-N}{2}+\alpha}, \tag{4.6}$$

从而, 若$s\geq s_*$, $|x(s)|<3N\epsilon$, $|y(s)|<3N\epsilon$, 则有

$$|Fx(s)| < 2N\epsilon + A\epsilon^2 s^{\frac{2-N}{2}+\alpha} \text{ 及 } |Fx(s) - Fy(s)| < \sup|x-y|B\epsilon s_*^{\frac{2-N}{2}+\alpha}.$$

A, B与ϵ无关. 选取$s_*^{\alpha} > C\epsilon^{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}$及适当的$C$, 则$F$是$B$上的压缩映象, 从而, 若定义$x_0 = \epsilon[a\psi_1 + b\psi_2]$, $x_{n+1} = F(x_n)$, $n\geq 0$, 则$\{x_n\}$收敛到B中唯一的一点x, 且

$$|x - x_0| \leq |x_0 - x_1|(1 - B\epsilon s_*^{\frac{2-N}{2}+\alpha})^{-1},$$

故$|x - x_0| \leq A\epsilon^2 s^{\frac{2-N}{2}+\alpha}(1 - B\epsilon s_*^{\frac{2-N}{2}+\alpha})^{-1}$. 从而$y(s) \equiv s^{-\frac{N-2}{2}}x(s) = \epsilon[a\varphi_1(s) + b\varphi_2(s)] + A(\epsilon, s)$

$\epsilon^2 s^{2-N+\alpha}$. 对(4.5)求导, 可得 $y_s(s)=\epsilon[a\varphi_1(s)+b\varphi_2(s)]_s+B(\epsilon,s)\epsilon^2 s^{1-N+\alpha}$. □

推论4.3 若 $s>s_*$, 则对 $\frac{b}{a}=\mathrm{tg}\varphi$, 有

$$\hat{u}(s)=M(s)+\epsilon s^{-\frac{N-2}{2}}\sin(\bar{\omega}\ln s+\varphi)(1+O(s^2))+A(\epsilon,s)\epsilon^2 s^{2-N+\alpha}.$$

推论4.4 存在可微函数 $f(s)$, 它在 $s=\mu_c$ 处有与 ϵ 无关的界, 使得 $\hat{u}(s)=\epsilon[a\varphi_1(s)+b\varphi_2(s)]+\epsilon^2 f(s)+M(s)$, 且 $f(\mu_c)=f_s(\mu_c)=0$.

5 $s>0$ 时 $\hat{u}(s)$ 的行为

在第二节当 $s^\alpha\gg\theta^{-1}$ 时给出了 $\omega(\theta,s)$ 的性质, 第三节当 $s^\alpha\ll\theta^{m-1}$ 时描述了 $\hat{u}$ 与 $\omega(\theta,s)$ 的关系而在上节, 当 $s^\alpha\gg\epsilon^{\overline{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}}$ 时讨论了 $\hat{u}$ 作为 $M(s)$ 的扰动. 在本节中, 将选取足够大的 θ 和足够小的 ϵ 以保证 $\epsilon^{\overline{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}}\ll\theta^{m-1}$, 然后决定 θ 与 ϵ 以便得到(1.1)的一个解 $\hat{u}(s)$, $s>0$. 本节主要结果是

引理5.1 在定理1.1的条件下, (1.1)有一个 C^2 解 $\hat{u}(s)$. 满足

$$u(\mu_c)=\epsilon[a\varphi_1(\mu_c)+b\varphi_2(\mu_c)], \tag{5.1}$$

并且

$$\hat{u}_s(\mu_c)=\epsilon[a\varphi_1(s)+b\varphi_2(s)]_s\big|_{s=\mu_c}+M_c(\mu_c), \tag{5.1'}$$

其中 φ_1,φ_2 如引理4.1所述.

定义 θ_* 及 ϵ_* 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\omega}}{2}(p-1)\ln\theta_*+D=\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a},\\&\epsilon_*=C\theta_*^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}},\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中 C,D 如引理2.2所述, 则对充分大的 θ_*,

$$\begin{aligned}&\theta=\theta_*(1+O(\theta_*^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}m})),\\&\epsilon=\epsilon_*(1+O(\theta_*^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}m})).\end{aligned}\tag{5.3}$$

证明 $\hat{u}$ 可这样构造: 在内部区域 $s^\alpha<\theta^{m-1}$ 上, 取 $\hat{u}=\hat{u}_1$ 满足(1.1), (1.2). 而在外部区域 $s^\alpha>\epsilon^{\overline{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}}$ 上. 令 $\hat{u}=\hat{u}_2$ 满足(1.1) 及(5.1), (5.1)′. 之后选取 θ 及 ϵ 使对固定的 $s=S$, 满足 $\epsilon^{\overline{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}}\ll s^\alpha\ll\theta^{m-1}$, 可以使 $\hat{u}_1(s)=\hat{u}_2(s)$ 且 $[\hat{u}_1(s)-\hat{u}_2(s)]_s\big|_{s=S}=0$, 这样 $\hat{u}$ 是(1.1) 的满足(1.2) 及(5.1), (5.1)′的解. 如果说 θ 及 ϵ 可通过 θ_* 及 ϵ_* 的一个小扰动得到. 为此定义函数 $F(\theta,\epsilon)$,

$$F^T(\theta,\epsilon)=(S^{\frac{N-2}{2}}(\hat{u}_1(S)-\hat{u}_2(S)),S^{\frac{N}{2}}(\hat{u}_1(s)-\hat{u}_2(s))_s\big|_{s=S}),$$

取 $\theta=\theta_*$, $\epsilon=\epsilon_*$, 由引理2.2, 引理3.1及引理4.3和有关 $M(s)$ 的性质, 对足够大的 θ_* 和足够小的 ϵ_*, 有

$$\left|S^{-\frac{N-2}{2}}F(\theta_*,\epsilon_*)\right|\le|A|\epsilon_*^2 S^{2-N+\alpha}+\text{低阶项} \tag{5.4}$$

及

$$\frac{\partial F(\theta,\epsilon)}{\partial(\theta,\epsilon)}=\begin{bmatrix} C\left(\frac{p-1}{2}\bar{\omega}\cos\sigma-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}\sin\sigma\right)\theta^{-\frac{N-2}{2\alpha}}, & \sin\sigma \\ C\left[\left(\frac{N-2}{\alpha}-1\right)\bar{\omega}\cos\sigma+\left(\frac{N-2-2\alpha}{4\alpha}(N-2)-\frac{p-1}{2}\bar{\omega}^2\right)\sin\sigma\right]\theta^{-\frac{N-2}{2\alpha}}, & \bar{\omega}\cos\sigma+\frac{2-N}{2}\sin\sigma \end{bmatrix}+\text{低阶项}$$

注意到 $\left|\frac{\partial F(\theta,\epsilon)}{\partial(\theta,\epsilon)}\right|=\frac{C}{\alpha}\theta^{-\frac{N-2}{2\alpha}}[\bar{\omega}^2-(N-2-\alpha)\sin 2\sigma]+$ 低阶项, 其中 $\sigma=\bar{\omega}\ln(s\theta^{\frac{p-1}{2}})+D$. 在定理1. 1的条件下, 有 $\left|\frac{\partial F(\theta,\epsilon)}{\partial(\theta,\epsilon)}\right|>0$. 令

$$\begin{aligned} G(x,y)&=F(\theta_*+\theta_*^{\frac{N-2}{2\alpha}}x,\epsilon_*+y)\\ &=F(\theta_*,\epsilon_*)+\frac{\partial F(\theta_*,\epsilon_*)}{\partial(\theta_*,\epsilon_*)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+E(x^2\epsilon_*^{-1}+y^2S^{-\frac{N-2-2\alpha}{2}}), \end{aligned}\tag{5. 6}$$

其中 E 是与 x,y,θ_*,ϵ_* 无关的量, 写 $G(x,y)=C+L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+T(x,y)$, 则 L 是可逆的线性算子, 定义 $J:R^2\to R^2$, $J(x,y)=-(L^{-1}F(\theta_*,\epsilon_*)+L^{-1}T(x,y))$. 选取适当的 θ_*, 则 $J:B\to B$, 其中

$$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\le\frac{2\alpha|A|\epsilon_*^2S^{-\frac{N-2-2\alpha}{2}}}{C[(1+\alpha)(N-2-\alpha)-\frac{1}{4}(N-2)^2]}\right\}.$$

由Brouwer不动点定理, J 在 B 中有不动点 (x,y), 对它显然有 $G(x,y)=0$ 且 $(x^2+y^2)^2\le A\epsilon_*^2S^{-\frac{N-2-2\alpha}{2}}$, 其中 A 是与 ϵ_*,θ_*,S 无关的常数. 取 $S=\theta_*^{m-1}$, 可得(5. 2). □

定理1. 1的证明 由推论4. 4, 注意到 $\hat{u}_s(s)<0$, 故当 $\epsilon\to0$ 时, $u(s)$ 定有零点 $\mu=\mu_c-x$, 于是 $0=\hat{u}(\mu_c-x)=\hat{u}(\mu_c)-\hat{u}_s(\xi)x$, 其中 ξ 在 μ_c 与 μ 之间. 从而 $x=\frac{\hat{u}(\mu_c)}{\hat{u}_s(\xi)}$, 注意到当 $\epsilon\to0$ 时, $x\to0$, 故 $\xi\to\mu_c$, 于是 $M_s(\xi)=M_s(\mu_c)+O(\epsilon)$. 从而由 $\hat{u}_s(\xi)=\epsilon[a\varphi_1(s)+b\varphi_2(s)]_s|_{s=\xi}+\epsilon^2f_s(\xi)+M_s(\xi)$ 知

$$x=\epsilon[a\varphi_1(\mu_c)+b\varphi_2(\mu_c)](1+O(\epsilon))/M_s(\mu_c),$$

令 $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, 对恰当的 φ_* 及 A, 有

$$x=\epsilon A\sin(\varphi+\varphi_*)(1+O(\epsilon)).$$

定义 $\tau=\varphi+\varphi_*$, $E=CA$, $\theta_0=\exp(-\frac{\alpha}{\omega}(D+\varphi_*))$. 其中 C,D 如引理2. 2所建, 而

$$\theta=\theta_*(\tau)[1+O(\theta_*(\tau)^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}m})],\quad \theta_*(\tau)=\theta_0\exp(\frac{\alpha}{\omega}\tau)$$

$$\mu=\mu_c-E\theta_*(\tau)^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}}\sin\tau[1+O(\theta_*(\tau)^{-\frac{N-2-2\alpha}{2\alpha}m})],$$

下面只需证 μ 是 $\hat{u}$ 的第一个零点. 由极值原理, $M_s(s)<0$, $s\in(0,\mu_c]$ 而当 $s^\alpha\gg\epsilon^{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}$ 时, $\hat{u}_s-M_s=O(\epsilon)$. 从而对足够小的 ϵ, $\hat{u}_s\ne0$, 故在 $\epsilon^{\frac{2\alpha}{N-2-2\alpha}}<s^\alpha<\mu^\alpha$ 时, $\hat{u}\ne0$, 即 μ 是 $\hat{u}$ 的第一个零点. □

定理1. 2的证明 取 $\tau=(k+n)\pi$, k 是足够大的正整数, $n=1,2,\cdots$, 则有一列 $\theta_n\to\infty$, $\hat{u}_n(0)=\theta_n$, $\hat{u}_n(s)$ 是(1. 1), (1. 2)之解, 以下证明

$$\int^{c}[\frac{d}{ds}(\hat{u}_n(s) - M(s))]^2 s^{N-1} ds \to 0 \quad (n \to \infty).$$

事实上, 对 $s \leq S$. **引理2 4蕴含常数** P, Q **与θ无关, 使**

$$|\hat{u}_n'(s)| < P s^{-(1+\alpha)}, \quad |\hat{u}_n(s)| < Q s^{-\alpha}.$$

同理, 对 $M(s)$, **也有常数** R, T **与θ无关, 使** $|M_s(s)| < R s^{-(1+\alpha)}$, $|M(s)| < T s^{-\alpha}$. **故**

$$\int [\frac{d}{ds}(\hat{u}_n(s) - M(s))]^2 s^{N-1} ds < C s^{N-1-2\alpha},$$

但 $n \to \infty$**时**, $S \to 0$. **故** $\int [\frac{d}{ds}(\hat{u}_n(s) - M(s))]^2 s^{n-1} ds \to 0 (n \to \infty)$, **同理可证**

$$\int^{c}[\frac{d}{ds}(\hat{u}_n(s) - M(s))]^2 s^{N-1} ds \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故 $\int^{c}[\frac{d}{ds}(\hat{u}_n(s) - M(s))]^2 s^{N-1} ds \to 0 \quad (n \to \infty).$ □

参 考 文 献

[1] Ambrosetti A, Brezis H and Gerami C. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in same elliptic problems* [J]. J. Funct Anal, 1994, **112**: 519- 543.

[2] Budd C and Norbury J. *Semilinear elliptic equations and supercritical growth* [J]. J. Diff. Equ., 1987, **68**: 169- 197.

[3] Merle F and Peletier L A. *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth* [J]. Proc Roy. Soc Edinburgh, 1991, **118**(A): 49- 62.

[4] Yu Qingyu and Ma Tian. *Positive solutions and bifurcation of nonlinear elliptic equations involvinj supercritical Sobolev exponents* [J]. Chinese J. Math. (Taiwan, R. O. C). , 1994, **22**(2): 99- 109.

[5] Gidas B, Ni W M and Nirenberg L. *Symmetry and related properties via the maximum principle* [J]. Comm. Math. Phys, 1979, **68**: 209- 243.

On the Existence of Positive Solutions of Elliptic Equations with Supercritical Growth

Zhao Peihao

(Dept. of Phy. and Math., Lanzhou University, 730000)

Wang Dong

(Air Force Fifth Flight Academy)

Abstract

This paper deals with the existence of the positive solutions of the semilinear elliptic Dirichlet problem $\Delta u + \lambda u^q + u^p = 0$ on a ball where $0 < q < 1$, $p > p_c \equiv \frac{N+2}{N-2} (N > 2)$ and $\lambda \in R$. Under the condition $N < 6$ or $N > 6$, $p < p_N$, we prove that there exists a unique constant $\lambda_0 > 0$, such that for $\lambda = \lambda_0$, there exists a unique radial singular solution and infinitely many of solutions.

Keywords semilinear elliptic equations, bifurcations, supercritical Sobolev exponents