第19卷第2期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 2
1999年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1999

一类高维时滞微分方程的周期解*

曹进德 李 琼
(云南大学成人教育学院, 昆明650091) (昆明师范专科学校, 昆明650031)

摘 要: 本文考虑高维时滞微分方程

$$x'(t)=A(t,x(t))x(t)+f(t,x(t-r(t)))$$

其中$(t,x)\in R^n$, $A(t,x)$是$n\times n$连续矩阵, $f(t,x)$是n维连续向量, $r(t)$是时间依赖的滞量, 应用不动点定理, 在确定的条件下, 证明了该系统的周期解的存在性与唯一性

关键词: 时滞微分方程, 周期时滞, 周期解
分类号: AMS(1991) 34C25, 34K15, 34A12/CLC O175.14
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)02-0401-08

考虑周期微分系统

$$x'(t)=A(t,x(t))x(t)+f(t,x(t-r(t))) \tag{1}$$

其中$(t,x)\in R\times R^n$, $A(t,x)$是$n\times n$连续矩阵, 且$A(t+T,x)=A(t,x)$; $f:R\times R^n\to R^n$是连续向量函数, $f(t+T,x)=f(t,x)$; 滞量$r:R\to R$是连续函数, $r(t+T)=r(t)$, $T>0$, 当$r(t)=0$或$r(t)\equiv$常数时, 文献[1-5, 9-10]曾经研究过(1)的T-周期解的存在性、唯一性等问题. 本文较一般地考虑(1)的上述问题. 获得较文献[3-5]更为普遍的结果.

设$x=(x_1,x_2\cdots x_n)^T\in R^n$, $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$, 兹按$R^n$中的不同范数定义$R^{n\times n}$上的矩阵测度[7]如下:

$$|x|_\infty=\max_i|x_i|,\ \mu_\infty(A)=\max_i\{a_{ii}+\sum_{j\neq i}^n|a_{ij}|\};$$

$$|x|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|,\ \mu_1(A)=\max_j\{a_{jj}+\sum_{i\neq j}^n|a_{ij}|\};$$

$$|x|_2=(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}},\ \mu_2(A)=\lambda_{\max}[\frac{1}{2}(A+A^T)],$$

这里A^T为A的转置, $\lambda_{\max}[B]$为矩阵B的最大特征值, 又设$n\times n$矩阵$B=(b_1\cdots,b_n)$, 定义$|B|_i=\max_i|b_i|_j$, $j=1,2,\infty$, 其中b_i为n维列向量, $i=1,2,\cdots,n$.

考虑时变线性系统

$$x'(t)=A(t)x(t), \tag{2}$$

* 收稿日期: 1995-11-12; 修订日期: 1998-06-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19202016); 云南省应用基础研究基金资助项目(97A012G, 96A001M)
作者简介: 曹进德(1963-), 男, 安徽人, 云南大学教授, 博士. 主要研究方向为非线性系统理论、神经网络与智能控制等.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

这里$A(t)$为$n\times n$连续矩阵, 设$X(t, t_0)$为(2)满足$X(t_0, t_0)=\mathrm{I}$的基本解矩阵.

引理1[7] 设$x(t)$是(2)的任一解, 则有

$$|x(t)|_i \le |x(t_0)|_i \exp\{\int_0^t \mu_i(A(\tau))\mathrm{d}\tau\},\ t\ge t_0,\ i=1,2,\infty.$$

由引理1可直接得到:

引理2 $|X(t, t_0)| \le \exp\{\int_0^t \mu_i(A(\tau))\mathrm{d}\tau\},\ t\ge t_0,\ i=1,2,\infty.$

引理3[8] 若$\det(X(T,0)-\mathrm{I})\ne 0, A(t+T)=A(t)$, 则对任何连续$T$-周期函数$f(t)$, 方程

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t)$$

有唯一T周期解, 该解由下式唯一确定:

$$x(t)=(\mathrm{I}-X(T,0))^{-1}\int_t^{t+T} X(t+T,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

或

$$x(t)=X(t,0)x_0+\int_0^t X(t,0)X^{-1}(s,0)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中$X(0,0)=I, x_0=(I-X(T,0))^{-1}\int_0^T X(T,0)X^{-1}(s,0)f(s)\mathrm{d}s.$

为行文方便起见, 以下用$|x|, \mu(A)$表示$|x|_j; \mu_j(A), j=1,2,\infty$中的任一种. 记$C$为所有由$R\to R^n$的连续函数所构成的线性空间, 定义

$C_T=\{u\in C: u(t+T)=u(t), t\in R\}, \|u\|=\sup_{0\le t\le T}|u(t)|$, 从而$(C_T, \|\cdot\|)$形成一个Banach空间.

定理1 设1) 存在R上的连续函数$\alpha(t)$, 使得对任意$(t,x)\in R\times R^n$, 有

$$\mu(A(t,x))\le\alpha(t)<0;\quad 2)\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\int_0^n \sup_{\|x\|\le n}|f(t,x)|\mathrm{d}t<1-k,$$

其中$k=\exp\int_0^T\alpha(s)\mathrm{d}s$则方程(1)存在$T$-周期解.

证明 任取$u\in C_T$, 考虑

$$x'(t)=A(t,u(t))x(t)+f(t,u(t-r(t))), \tag{3}$$

$$x'(t)=A(t,u(t))x(t). \tag{4}$$

记$X_u(t,0)$为方程(4)的基本解矩阵, $X_u(0,0)=\mathrm{I}$, 由引理2可得

$$|X_u(t,0)|\le\exp\int_0^t\mu(A(\tau,u(\tau)))\mathrm{d}\tau,$$

特别地, 当$t=T$时有

$$|X_u(T,0)|\le\exp\int_0^T\mu(A(\tau,u(\tau)))\mathrm{d}\tau\le\exp\int_0^T\alpha(\tau)\mathrm{d}\tau=k<1,$$

由此易证$(I-X_u(T,0))^{-1}$存在([5]), 且有

$$|(I-X_u(T,0))^{-1}|=|\sum_{n=0}^{\infty}(X_u(T,0))^n|\le\sum_{n=0}^{\infty}k^n=\frac{1}{1-k}.$$

由于$u(t), r(t)$都是T-周期连续函数, 所以$A(t,u(t))$与$f(t,u(t-r(t)))$亦是T-周期连续函数, 根据引理3, 存在唯一T周期解$x(u)(t)$,

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$x(u)(t) = (I - X_u(T,0))^{-1}\int^T X_u(t+T,s)f(s,u(s-r(s)))\mathrm{d}s$$

现定义算子 $P: C_T \to C_T$: $(Pu)(t) = x(u)(t)$ 兹证 P 是 C_T 上全连续算子. 事实上, 设 S 是 C_T 中的有界集: $\|u\| \le a$, $\forall u \in S$, 于是

$$\begin{aligned}
|(Pu)(t)| &= \left|(I - X_u(T,0))^{-1}\int^T X_u(t+T,s)f(s,u(s-r(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|(I - X_u(T,0))^{-1}\right|\int^T |X_u(t+T,s)| \cdot |f(s,u(s-r(s)))|\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{1-k}\int^T \exp\left(\int^T \mu(A(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)|f(s,u(s-r(s)))|\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{1-k}\int^T |f(s,u(s-r(s)))|\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{1-k}\int^T |f(s,u(s-r(s)))|\mathrm{d}s \le \frac{MT}{1-k},
\end{aligned}$$

其中 $M = \max\limits_{\substack{t\in[0,T] \\ \|x\|\le a}} |f(t,x)|$, 故 $P(S)$ 中诸函数一致有界.

记

$$b_0 = \sup\{|f(t,x)| \mid (t,x) \in [0,T]\times S\},$$
$$b_1 = \sup\{|A(t,x)| \mid (t,x) \in [0,T]\times S\}.$$

又因为对任意 $u \in S$ 有

$$\frac{\mathrm{d}(Pu)(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(u)(t)}{\mathrm{d}t} = A(t,u(t)(Pu)(t) + f(t,u(t-r(t))),$$

所以 $\left\|\frac{\mathrm{d}(Pu)(t)}{\mathrm{d}t}\right\| \le b_1\frac{MT}{1-k} + b_0$, 由此可见 $P(S)$ 中诸函数是等度连续的, 从而 P 是 $C_T \to C_T$ 的紧算子.

下证 P 的连续性: 设 $u_n, u_0 \in C_T$, $\|u_n - u_0\| \to 0\ (n\to\infty)$, 令 $V = Pu_n - Pu_0$, 由(3)得

$$\begin{aligned}
V' &= A(t,u_n(t))Pu_n(t) - A(t,u_0(t))Pu_0(t) + f(t,u_n(t-r(t))) - f(t,u_0(t-r(t))) \\
&= A(t,u_n(t))V + [A(t,u_n(t)) - A(t,u_0(t))]Pu + f(t,u_0(t-r(t))).
\end{aligned} \tag{5}$$

记

$$f_n^*(t) \equiv [A(t,u_n(t)) - A(t,u_0(t))]Pu_0(t) + f(t,u_n(t-r(t))) - f(t,u_0(t-r(t))).$$

令 $a = \sup\{\|u_0\|, \|u_1\|, \|u_2\|, \ldots\}$, 由 $A(t,x)$, $f(t,x)$ 在 $[0,T]\times G$ 上(其中 $G = \{x \in R^n: \|x\| \le a\}$)的一致连续性, 及 $\|Pu_0\| \le \frac{MT}{1-k}$ 知, 当 $\|u_n - u_0\| \to 0$ 时, $|f_n^*(t)| \to 0$, 并且(5)式可以写成

$$V' = A(t,u_n(t))V + f_n^*(t), \tag{6}$$

即 $V(t)$ 是(6)的 T 周期解, 于是由引理3, 有

$$V(t) = X_{u_n}(t,0)V(0) + \int X_{u_n}(t,0)X_{u_n}^{-1}(s,0)f_n^*(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$V(0) = (I - X_{u_n}(T,0))^{-1}\int^T X_{u_n}(T,0)X_{u_n}^{-1}(s,0)f_n^*(s)\mathrm{d}s,$$

且

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\left|X_{u_n}(t,0)X_{u_n}^{-1}(\tau,0)\right| \le \exp\int_\tau^t \mu(A(s,u_n(s)))\,ds \le \exp\int_\tau^t \alpha(s)\,ds,\ 0\le\tau\le t\le T,$$

$$\left|V(0)\right| \le \left|(I-X_{u_n}(T,0))^{-1}\right|\int_0^T \left|X_{u_n}(T,0)X_{u_n}^{-1}(s,0)\right|\left|f_n^*(s)\right|ds \le \frac{1}{1-k}\int_0^T \left|f_n^*(s)\right|ds.$$

从而

$$\begin{aligned}\left|V(t)\right| &\le \left|X_{u_n}(t,0)\right|\cdot\left|V(0)\right| + \int_0^T \left|X_{u_n}(t,0)X_{u_n}^{-1}(s,0)\right|\left|f_n^*(s)\right|ds\\ &\le \left|V(0)\right| + \int_0^T \left|f_n^*(s)\right|ds \le \left|V(0)\right| + \int_0^T \left|f_n^*(s)\right|ds\\ &\le \frac{2-k}{1-k}\int_0^T \left|f_n^*(s)\right|ds\end{aligned}$$

由此可见, 当 $\|u_n-u_0\|\to 0$ 时, 有 $\|Pu_n-Pu_0\|=\|V\|\to 0$, 综上所述 P 为 C_T 上全连续算子.

再定义函数 $g(n):(0,\infty)\to R: g(n)=\frac{1}{n}\int_0^T \sup_{|x|\le n}\left|f(t,x)\right|dt$, 由 2) 知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, g(n) \overset{\triangle}{=} \delta < 1-k$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, $g(n)<\delta_1=\delta+\epsilon<1-k$, 其中 $\epsilon=\frac{1}{2}(1-k-\delta)$, 现设 $\lambda\in(0,1)$, 若 $u\in C_T$, 且 $u=\lambda Pu$, 则有

$$\begin{aligned}\left|u(t)\right| &\le \lambda\left|(I-X_u(T,0))^{-1}\right|\int_0^T \left|X_u(t+T,s)\right|\left|f(s,u(s-r(s)))\right|ds\\ &\le \frac{1}{1-k}\int_0^T \exp\{\int_\tau^t \mu(A(\tau,u(\tau))\,d\tau\}\left|f(s,u(s-r(s)))\right|ds\\ &\le \frac{1}{1-k}\int_0^T \left|f(s,u(s-r(s)))\right|ds = \frac{1}{1-k}\int_0^T \left|f(s,u(s-r(s)))\right|ds,\end{aligned}$$

$$\frac{\left|u(t)\right|}{\|u\|} \le \frac{1}{1-k}\int_0^T \frac{1}{\|u\|}\sup_{|x|\le\|u\|}\left|f(s,x)\right|ds = \frac{1}{1-k}g(\|u\|).$$

假如 $\|u\|>N$, 则有 $\frac{|u(t)|}{\|u\|}\le\frac{1}{1-k}\delta_1<1$, $t\in[0,T]$, 故 $\sup_{0\le t\le T}\frac{|u(t)|}{\|u\|}\le\frac{\delta_1}{1-k}<1$, 而另一方面, 显然有: $\sup_{0\le t\le T}\frac{|u(t)|}{\|u\|}=\frac{\|u\|}{\|u\|}=1$, 矛盾. 此矛盾说明 $\|u\|\le N$, 于是由 Leray-Shauder 不动点定理([6]) 知算子 P 在 C_T 中存在不动点 u^*, 且 $\|u^*\|\le N$, 易知 u^* 就是(1) 的 T-周期解.

推论1 若(1) 存在 R 上的 T 周期连续函数 $\alpha(t)$, $\alpha(t)\not\equiv 0$, 使得对任意 $(t,x)\in[0,T]\times R^n$, 有 $\mu(A(t,x))\le\alpha(t)\le 0$, 记

$$k=\exp\int_0^T \alpha(s)\,ds\ (<1);\ 2)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\int_0^T \sup_{|x|\le n}\left|f(t,x)\right|dt<1-k,$$

则方程(1) 存在 T-周期解.

证明与定理1类同, 故从略.

定理2 若定理1的条件1) 或推论1的条件1) 成立, 且存在常数 $M>0$, 使对 $(t,x)\in[0,T]\times R^n$, 有 $\left|f(t,x)\right|\le M$, 则方程(1) 存在 T-周期解.

证明 同定理1可以定义算子

$$P: C_T\to C_T: (Pu)(t)=x(u)(t)=(I-X_u(T,0))^{-1}\int_0^T X_u(t+T,s)f(s,u(s-r(s)))\,ds,$$

易证 P 是 C_T 上连续算子, 现设 $\lambda\in(0,1)$, 若 $u\in C_T$, 且 $u=\lambda Pu$, 则

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$|u(t)| \le \lambda |(I - X_u(T,0))^{-1}| \int^T |X_u(t+T,s)| |f(s,u(s-r(s)))| ds$$
$$\le \frac{1}{1-k} \int^T \exp\{\int^T \mu(A(\tau,u(\tau))d\tau\} |f(s,u(s-r(s)))| ds$$
$$\le \frac{1}{1-k} \int^T |f(s,u(s-r(s)))| ds \le \frac{MT}{1-k}.$$

从而有 $\|u\| \le \frac{MT}{1-k}$, 由 Leray-Shauder 不动点定理知, 算子 P 在 C_T 中存在不动点 u^*, 且 $\|u^*\| \le \frac{MT}{1-k}$, 易知 $u^*(t)$ 就是(1)的 T 周期解

定理3 若1) 存在 R 上的 T 周期连续函数 $\alpha(t)$, 使对任意 $(t,x) \in [0,T] \times R^n$ 有

$$\mu(A(t,x)) \le \alpha(t), k = \exp \int^T \alpha(\tau) d\tau < 1;$$

2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \int^T \sup_{|x|\le n} |f(t,x)| \le \frac{1-k}{M}$, 其中 $M = \sup_{0\le s\le t\le T} \exp\{\int^t \alpha(\tau) d\tau\}$,

则方程(1) 存在 T 周期解

证明 同定理 1, 定义算子 $P: C_T \to C_T$:

$$(Pu)(t) = x(u)(t) = (I - X_u(T,0))^{-1} \int^T X_u(t+T,s) f(s,u(s-r(s))) ds$$

仿定理 1 可证: P 是 C_T 上的全连续算子. 现定义函数

$$g(n): (0,\infty) \to R, g(n) = \frac{1}{n} \int^T \sup_{|x|\le n} |f(t,x)| dt$$

由 2) 知 $\overline{\lim_{n\to\infty}} g(n) \overset{\text{def}}{=} \delta \le \frac{1-k}{M}$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $g(n) < \delta_1 = \delta + \epsilon < \frac{1-k}{M}$, 其中 $\epsilon = \frac{1}{2}(\frac{1-k}{M} - \delta)$, 再设 $\lambda \in (0,1)$, 若 $u \in C_T$, 且 $u = \lambda P u$, 则有

$$|u(t)| \le \lambda |(I - X_u(T,0))^{-1}| \int^T |X_u(t+T,s)| |f(s,u(s-r(s)))| ds$$
$$\le \frac{1}{1-k} \int^T \exp\{\int^T \mu(A(\tau,u(\tau)))d\tau\} |f(s,u(s-r(s)))| ds$$
$$\le \frac{M}{1-k} \int^T |f(s,u(s-r(s)))| ds$$
$$= \frac{M}{1-k} \int^T |f(s,u(s-r(s)))| ds \text{(因为 } f(s,u(s-r(s))) \text{ 以 } T \text{ 为周期)}$$
$$\frac{|u(t)|}{\|u\|} \le \frac{M}{1-k} \int \frac{1}{\|u\|} \sup_{|x|\le\|u\|} |f(s,x)| ds = \frac{M}{1-k} g(\|u\|).$$

假如 $\|u\| > N$, 则有 $\sup_{0\le t\le T} \frac{|u(t)|}{\|u\|} \le \frac{M}{1-k}\delta_1 < 1$, 而另一方面, 显然有 $\sup_{0\le t\le T} \frac{|u(t)|}{\|u\|} = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$, 矛盾, 这说明 $\|u\| \le N$, 于是由 Leray-Shauder 不动点定理知, 算子 P 在 C_T 中存在不动点, 且 $\|u^*\| \le N$, 易知 $u^*(t)$ 就是(1) 的 T-周期解

推论 2 若 1) 存在 R 上的 T-周期连续函数 $\alpha(t)$, 使对任意 $(t,x) \in [0,T] \times R^n$, 有

$$\mu(A(t,x)) \le \alpha(t), k = \exp \int^T \alpha(t) dt < 1;$$

2) 存在 $M > 0$, 使对任意 $(t,x) \in [0,T] \times R^n$, 有 $|f(t,x)| \le M$,

则方程(1) 存在 T-周期解

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 同定理 3 可以定义算子: $P: C_T \to C_T$:

$$(Pu)(t) = x(u)(t) = (I - X_u(T,0))^{-1}\int^T X_u(t+T,s) f(s, u(s-r(s)))\,ds.$$

仿定理1可以证明 P 是 C_T 上的全连续算子, 现设 $\lambda \in (0,1)$, 若 $u \in C_T$, 且 $u = \lambda P u$, 则

$$\begin{aligned}|u(t)| &\le \lambda\left|(I - X_u(T,0))^{-1}\right| \int^T |X_u(t+T,s)|\,|f(s,u(s-r(s)))|\,ds \\ &\le \frac{1}{1-k}\int^T \exp\{\int^T \mu(A(\tau,u(\tau)))\,d\tau\}\,|f(s,u(s-r(s)))|\,ds \\ &\le \frac{M}{1-k}\int^T \exp\{\int^T \alpha(\tau)\,d\tau\}\,ds \\ &\le \frac{MLT}{1-k}\ (\text{这里 } L = \sup_{0\le s\le t\le T}\exp\{\int \alpha(\tau)\,d\tau\}).\end{aligned}$$

从而有 $\|u\| \le \frac{MLT}{1-k}$, 于是由 Leray-Shauder 不动点定理知, 算子 P 在 C_T 中至少存在不动点 u^*, 且 $\|u^*\| \le \frac{MLT}{1-k}$, 易知 $u^*(t)$ 就是(1)的 T-周期解

作为(1)的特例, 考虑如下拟线性方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t-r(t))), \tag{7}$$

其中 $A(t)$ 为 $n\times n$ 连续矩阵, $A(t+T) = A(t)$, f, r 的定义同前

定理 4 若 1) $\exp\int^T \mu(A(\tau))\,d\tau = k < 1$; 2) $|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|$; 3) $\sup_{0\le s\le t\le T}\exp\{\int \mu(A(\tau))\,d\tau\} < \frac{1-k}{TL}$, 则方程(7)存在唯一 T-周期解

证明 任取 $u \in C_T$, 考虑方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, u(t-r(t))). \tag{8}$$

设 $X(t,\tau)$ 方程

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{9}$$

满足 $X(\tau,\tau) = I$ 的基本解矩阵, 由引理2知 $|X(t,0)| \le \exp\int \mu(A(\tau))\,d\tau$, 当 $t = T$ 时, 有

$$|X(T,0)| \le \exp\int^T \mu(A(\tau))\,d\tau = k < 1.$$

由此易证 $(I - X(T,0))^{-1}$ 存在, 且有 $\left|(I - X(T,0))^{-1}\right| \le \frac{1}{1-k}$, 由于 f, u, r 都是以 T 为周期的连续函数, 故 $f(t, u(t-r(t)))$ 仍是以 T 为周期的连续函数, 于是由引理3知(8)存在唯一 T-周期解 $x(u)(t)$, 且

$$x(u)(t) = (I - X(T,0))^{-1}\int^T X(t+T,s) f(s, u(s-r(s)))\,ds.$$

现定义算子 $P: C_T \to C_T$: $(Pu)(t) = x(u)(t)$.

下证 P 是 C_T 上的压缩映射, 事实上, 对任意 $u_1, u_2 \in C_T$ 有

$$\begin{aligned}&|Pu_1 - Pu_2| \\ &= \left|(I - X(T,0))^{-1}\int^T X(t+T,s)[f(s,u_1(s-r(s))) - f(s,u_2(s-r(s)))]\,ds\right| \\ &\le \left|(I - X(T,0))^{-1}\right| \int^T |X(t+T,s)|\,|f(s,u_1(s-r(s))) - f(s,u_2(s-r(s)))|\,ds\end{aligned}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\leq \frac{1}{1-k}\int^{T}\exp\int^{T}\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau\cdot L\left|u_1(s-r(s))-u_2(s-r(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq \frac{L}{1-k}\sup_{0\leq s\leq t\leq T}\int\mu(A(\tau)\mathrm{d}\tau\int^{T}\left|u_1(s-r(s))-u_2(s-r(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq \frac{L}{1-k}\sup_{0\leq s\leq t\leq T}\int\mu(A(\tau)\mathrm{d}\tau\int^{T}\left|u_1(s-r(s))-u_2(s-r(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq \frac{TL}{1-k}\sup_{0\leq s\leq t\leq T}\int\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau\|u_1-u_2\|,$$

从而有 $\|Pu_1-Pu_2\|\leq\frac{TL}{1-k}\sup_{0\leq s\leq t\leq T}\int\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau\|u_1-u_2\|$, 且由3) 知

$$0<\frac{TL}{1-k}\sup_{0\leq s\leq t\leq T}\int\mu(A(\tau)\mathrm{d}\tau<1.$$

这说明 P 是 C_T 上压缩映射, 由压缩映射原理知, 在 C_T 中存在唯一不动点 u^*, 易见 $u^*(t)$ 就是(7) 的唯一 T-周期解

推论3 若1) $\mu(A(t))\leq 0(\not\equiv 0)$; 2) $\left|f(t,x)-f(t,y)\right|\leq L\left|x-y\right|$; 3) $TL<1-\exp\int\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau$, 则方程(7) 存在唯一 T-周期解

证明 由 $\mu(A(t))\leq 0(\not\equiv 0)$ 知: $0<\exp\int\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau=k<1$, 算子 P 的定义完全同定理4, 下证 P 为 C_T 上的压缩映射, 事实上, 对任意 $u_1, u_2\in C_T$

$$\left|Pu_1-Pu_2\right|$$
$$\leq\left|(I-X(T,0))^{-1}\int^{T}\left|X(t+T,s)\right|\left|f(s,u_1(s-r(s)))-f(s,u_2(s-r(s)))\mathrm{d}s\right|\right.$$
$$\leq\frac{1}{1-k}\int^{T}\exp\int^{T}\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau\cdot L\left|u_1(s-r(s))-u_2(s-r(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq\frac{L}{1-k}\int^{T}\left|u_1(s-r(s))-u_2(s-r(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$=\frac{L}{1-k}\int\left|u_1(s-r(s))-u_2(s-r(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq\frac{TL}{1-k}\|u_1-u_2\|$$

从而 $\|Pu_1-Pu_2\|\leq\frac{TL}{1-k}\|u_1-u_2\|$, 而由3) 知:

$$0<\frac{TL}{1-k}<1.$$

这说明 P 是 C_T 上压缩映射, 故 P 在 C_T 中存在唯一不动点 u^*, 易知 $u^*(t)$ 就是(7) 的唯一 T 周期解

参 考 文 献

[1] Lasota A, Opial Z. *Surles solutions perodiques des equations differentielles ordinaires* [J]. Ann. Polon. Math, 1964, **16**: 69-94.

[2] Krasnoselskii M A. *The Operator of Translation along Trajectories of Differential Equations* [M]. Izdat. Nauka. Moscow, 1966.

[3] 王克. 一类具偏差变元的微分方程的周期解 [J]. 数学学报, 1994, **37**(3): 409-413.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[4] 王联, 王慕秋. 高维周期耗散系统中的一个平稳振荡定理 [J]. 中国科学, 1982, **7**: 607- 614.
[5] 李黎明. 一类高维非自治系统的周期解 [J]. 应用数学学报, 1989, **12**((3): 272- 280.
[6] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科技出版社, 1985.
[7] Vidya sagar M. *Nonlinear Systems Analysis* [M]. Prentice-Hall Inc. 1978.
[8] Hale J K. *Ordinary Differential Equations* [M]. Wiley-Interscience, 1969.
[9] 曹进德, 李永昆. 具时滞的高阶周期系统周期解的存在性与唯一性 [J]. 数学学报, 1997, **40**(2): 280—286.
[10] Cao Jinde, Wan Shidong. *Periodic solutions of higher dimensional periodic systems with delay* [C]. Proceeding of the Second Asian Mathematical Conference, World Scientific, 1998, 316- 319.

Periodic Solutions for a Class of Higher Dimensional Delay Differential Equations

Cao Jinde
(Adult Education College, Ynnnan University, Kunming 650091)

Li Qiong
(Kunming Junior Normal College, Kunming 650031)

Abstract

In this paper, higher dimensional delay differential equations of the form

$$x'(t) = A(t, x(t))x(t) + f(t, x(t - r(t)))$$

are considered, where the $n \times n$ matrix $A(t, x)$ and the n-vector $f(t, x)$ are continuous in $(t, x) \in R \times R^n$, $r(t)$ is a delay depending on time t. Using fixed point method, existence and uniqueness of periodic solutions to the above system are proved under defined conditions.

Keywords delay differential equation, periodic deley, periodic solution.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.