第19卷第2期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 2
1999年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1999

一个概周期锁相环路方程的概周期解的存在唯一性和渐近稳定性*

金 均
(上海师范大学数学系, 200234)

摘 要: 本文研究了一个概周期锁相环路方程的概周期解的存在唯一性及渐近稳定性, 得到了保证系统存在唯一渐近稳定的概周期解的充分条件.

关键词: 概周期, 锁相环路方程, 概周期解, 存在唯一性, 渐近稳定性
分类号: AMS(1991) 34C25, 34D/CLC O175.13
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)02-0409-09

1 引 言

文献[1,2]研究了鉴相特性为

$$g(\varphi)=\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\quad(0<k<1) \tag{1}$$

的带有周期强迫项的二阶非线性方程的周期解的存在唯一性及渐近稳定性. 但在实际问题中, 强迫项为周期函数是很难实现的, 通常强迫项为一个概周期函数. 然而, 目前国内外很少有人对此作深入的研究. 本文研究了一个二阶非线性带有概周期强迫项的锁相环路方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+f\left(\varphi,\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt}+\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}=ue(t) \tag{2}$$

的概周期解的存在唯一性及其渐近稳定性. 这里 u 是一个正参数, $f(\varphi,\dot\varphi)$ 是关于变量 $\varphi,\dot\varphi$ 的连续可微函数, $e(t)$ 是概周期函数. 为了研究的方便, 先引进下面几条定理.

考虑一般的非线性概周期微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x). \tag{3}$$

定理1 设 1) $f(t,x)\in C(R\times E^n,E^n)$, 对 $x\in E^n$ 关于 t 是一致概周期函数;

2) 方程(3)有解 $\varphi(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上有界, 且 $\overline{\{\varphi(t),t\geq t_0\}}=S$, 则(3)必有 R 上有界的解 $\psi(t)$, 且对一切 $t\in R$ 有 $\psi(t)\subset S$.

定理2 设 1) $f(t,x)$ 满足李普希兹条件, 即存在常数 $L>0$, 对任意的 $t\in R$, $x,y\in S$, 有

* **收稿日期**: 1996-04-08
作者简介: 金均(1937-), 男, 上海嘉定人, 现为上海师范大学教授. 主要从事非线性动力系统稳定性理论、离散动力系统稳定性理论及概周期微分方程的应用等研究.

$\|f(t,x)-f(t,y)\|\le L\|x-y\|$;

2) 方程组(3) 的解 $\varphi(t)$ 是一致渐近稳定的, 且对 $t\in R_+$ 有 $\varphi(t)\subset s$, 则它是渐近概周期的

以上二条定理的证明见[3].

定理3 设方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax+B(t)x \tag{4}$$

(这里 A 为 $n\times n$ 的常数矩阵, $x\in C(E^n)$, $B(t)$ 为 $n\times n$ 的函数规阵) 满足

1) 其对应的齐线性方程组 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的一切解当 $t\to\infty$ 时都趋于零;

2) $\|B(t)\|\le C$, 其中 C 只与 A 相关; 则方程组(4)的解与其对应的齐线性方程组的解有相同的性质

定理证明见文献[4].

1 概周期解的存在性

为了研究方程组(2)概周期解存在性, 把它改写成方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=Z,\\ \dfrac{dZ}{dt}=-f(\varphi,Z)Z-g(\varphi)+ue(t).\end{cases} \tag{5}$$

根据(1), $g(\varphi)$ 显然有下面的性质:

1) $g(\varphi)=-g(-\varphi)$; 2) 当 $|\varphi|<\varphi^*$ 时有 $g'(\varphi)>0$, 它的图象见图1

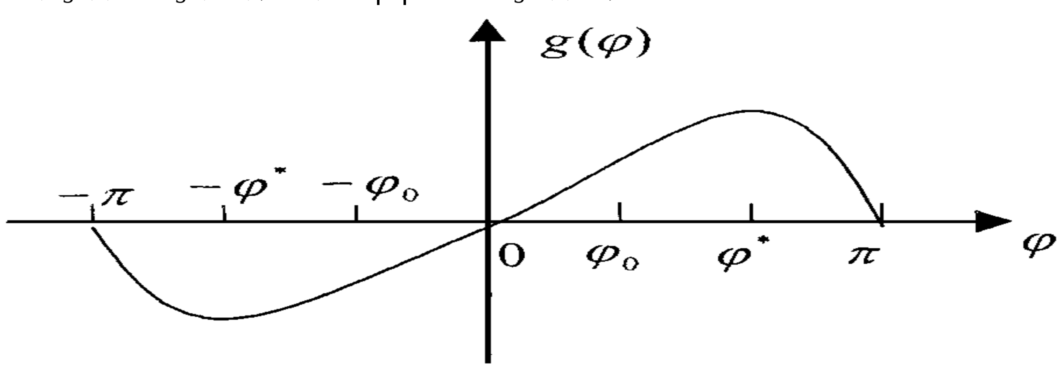

图1

定理4 设方程组(5)满足

1) $|e(t)|\le M$ $(M>0)$;

2) $f(\varphi,Z)\ge\alpha>0$, $f(\varphi+2\pi,Z)=f(\varphi,Z)$;

3) 参数 M 适当小, 使它满足

$$\frac{8u^2M^2}{\alpha^2}\le\int_0^{\varphi^*}(g(\varphi)-uM)\,d\varphi, \tag{6}$$

这里φ_0是$g(\varphi)-uM=0$的根，且$0<\varphi_0<\varphi^*<\pi$，$\varphi^*$是$g'(\varphi)=0$根，
那么对方程(5)的每一个解，存在t_0(t_0依赖于(5)的解)使得解当$t\geq t_0$时满足$|\varphi(t)|\leq L_1$，$|Z(t)|\leq L_2$，其中$0<L_1=\varphi_1\leq\varphi^*$，$L_2=\sqrt{\left(\frac{4uM}{\alpha}\right)^2+2\int_0^{\varphi^*}g(\varphi)\mathrm{d}\varphi}$

为了证明定理4，首先证明下列引理

设控制方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=Z,\\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-\alpha Z-g(\varphi)+uM\end{cases}\tag{7}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=Z,\\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-\alpha Z-g(\varphi)-uM.\end{cases}\tag{8}$$

引理1　系统(7)在上半柱面$\{-\pi\leq\varphi\leq\pi,0<Z\leq+\infty\}$所确定的方向场与系统(8)在下半柱面$\{-\pi\leq\varphi\leq\pi,-\infty<Z\leq 0\}$所确定的方向场对对称于原点的点而言大小相等，方向相反

证明　先在上半柱面研究(7)，它在条形区域$-\varphi^*\leq\varphi\leq\varphi^*$中唯一奇点为$(\varphi_0,0)$，其中$\varphi_0$为方程

$$g(\varphi)-uM=0\tag{9}$$

的根，由于$g(\varphi)$在$[0,\varphi^*]$上单调增加，且$g(0)=0$，因而当$uM<\mathrm{M\,ax}\,g(\varphi)$时，方程(9)在$(0,\varphi^*)$内存在唯一解$\varphi_0$，$0<\varphi_0<\varphi^*$，图2中画出的系统(7)的水平等倾线$\Gamma_1$: $\alpha Z=-g(\varphi)+uM$，将上半平面分成两个区域，其方向场如下:

区域Ⅰ　$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}>0$，$\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}>0$；　区域Ⅱ　$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}>0$，$\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}<0$.

同样在下半柱面上讨论系统(8)，此时在区域: $-\varphi^*\leq\varphi\leq\varphi^*$中唯一奇点为$(-\varphi_0,0)$，它的水平等倾线$\Gamma_2$: $\alpha Z=g(\varphi)-uM$将下半柱面分成二部份，它的方向场见图2

引理2　当

$$\frac{1}{2}Z_0^2\leq\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}(g(\varphi)-uM)\mathrm{d}\varphi\tag{10}$$

时，过点(φ_0,Z_0)的系统(5)的相轨线决不与$\varphi=\varphi^*$相交

证明　作方程(7)的比较方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=Z,\\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-g(\varphi)+uM,\end{cases}\tag{11}$$

方程(11)的相轨线方程为$Z\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-g(\varphi)+uM$，两端积分得$\int Z\mathrm{d}Z=\int_{\varphi^*}^{\varphi_0}(uM-g(\varphi))\mathrm{d}\varphi$，特别当$\varphi=\varphi_0$，$Z=Z_0$时，有$\frac{1}{2}Z_0^2\leq\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}(g(\varphi)-uM)\mathrm{d}\varphi$，由于过一定点的轨线的唯一性定理知道，

当 Z_0 满足(10)时，方程组(11)的轨线决不与直线 $\varphi=\varphi^*$ ($Z>0$) 相交，又因为 $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}\Big|_{(7)}<\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}\Big|_{(11)}$，所以由比较定理知，系统(7)的轨线在系统(11)的轨线的下方，因为必不与直线 $\varphi=\varphi^*$ ($Z\ge 0$) 相交.

设 u 适当小，使它满足 $\frac{8u^2M^2}{\alpha^2}\le\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}(g(\varphi)-uM)\,\mathrm{d}\varphi$. 如果取

$$Z_1=\sqrt{2\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}(g(\varphi)-uM)\,\mathrm{d}\varphi},$$

则 $Z_1\ge\frac{4uM}{\alpha}$，过点 $A(\varphi_0,Z_1)$ 作系统(7)的轨线 $\overleftarrow{AB}$，由引理2知，它必交 φ 轴于点 $B(\varphi_1,0)$，其中 φ_1 满足 $\varphi_0<\varphi_1<\varphi^*$，再过 B 作系统(8)的轨线 $\overleftarrow{BC}$，它必与直线 $\varphi=\varphi_0$ ($Z<0$) 相交于点 $(\varphi_0,-Z_0)$，见图3.

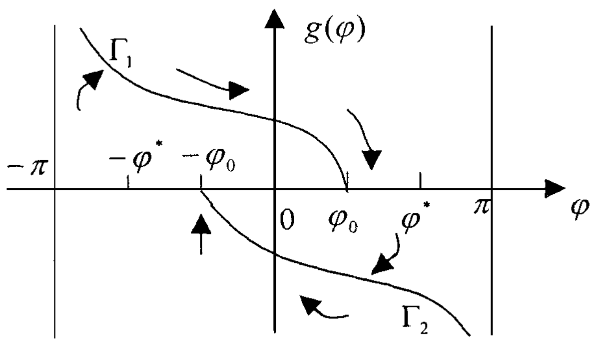

图2

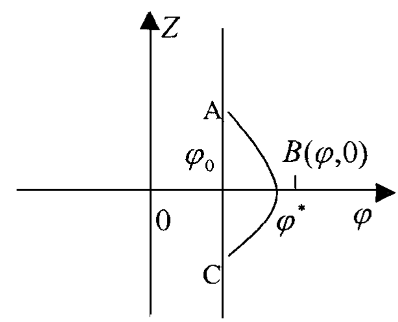

图3

引理3　曲线弧 $\overleftarrow{AB}$ 是凸向上的.

证明　方程(7)的轨线方程为

$$Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}=-\alpha Z-g(\varphi)+uM. \tag{12}$$

对(12)两边关于 φ 求导，得 $Z\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}\varphi^2}+\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right)^2=-\alpha\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}-g'(\varphi)$. 对上式两端乘以 Z，并利用(12)得

$$Z^2\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\alpha Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}-Zg'(\varphi)-\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}(-\alpha Z-g(\varphi)+uM),$$

化简得 $Z^2\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}\varphi^2}=(g(\varphi)-uM)\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varphi}-Zg'(\varphi)$. 因为 $g(\varphi)-uM>0$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}<0$, $Z>0$, $g'(\varphi)>0$，所以 $\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}\varphi^2}<0$，因此曲线弧 $\overleftarrow{AB}$ 是凸向上的.

引理4　除去点 $A(\varphi_0,Z_1)$ 外，$\overleftarrow{ABC}$ 弧上一切点的纵坐标 Z 满足 $|Z|<Z_1$.

证明　分两种情况证明:

情况1　曲线 $\overleftarrow{BC}$ 不与水平等倾线 Γ_2: $\alpha Z=-g(\varphi)-uM$ 相交(图4)，此时延长 $\overleftarrow{BC}$ 交 Γ_2 于点 $Q(\xi,\eta)$,

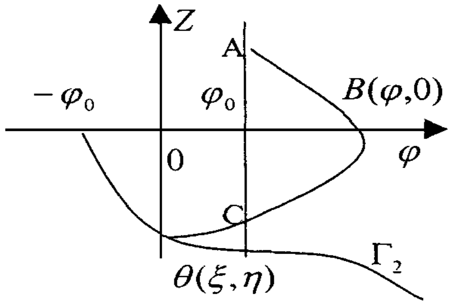

图 4

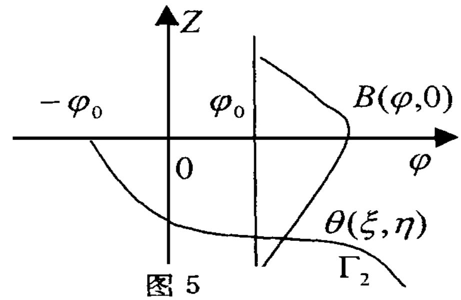

图 5

则 Q 是最低点且 $0<\xi<\varphi_0$, 在 $\overleftarrow{AB}$ 上, $|Z|<Z_1$, 在 Γ_2 上, $Q(\xi,\eta)$ 应满足曲线方程

$$\eta = \frac{-g(\zeta)}{\alpha} - \frac{uM}{\alpha} \geq \frac{-g(\varphi_0)}{\alpha} - \frac{uM}{\alpha} = -\frac{uM}{\alpha} - \frac{uM}{\alpha} = -\frac{2uM}{\alpha},$$

所以 $|\eta| < \frac{2uM}{\alpha} < Z_1$.

情况2　曲线 $\overleftarrow{BC}$ 与 Γ_2 相交于 $Q(\xi,\eta)$ (图5), 此时 $0<\varphi_0<\xi$, 对方程(8)沿曲线 $\overleftarrow{BC}$, 从 B 至 Q 进行积分, 得 $\frac{1}{2}\eta^2 = -\alpha\int_{\varphi_1}^{\zeta} Z\,\mathrm{d}\varphi - \int_{\varphi_1}^{\zeta} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - uM(\zeta-\varphi_1)$, 即

$$\frac{1}{2}\eta^2 < -\int_{\varphi_1}^{\zeta} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - uM(\zeta-\varphi_1). \tag{13}$$

另一面, 沿曲线 $\overleftarrow{AB}$ 对方程(7)从 A 至 B 进行积分, 得

$$\frac{1}{2}Z_1^2 = -\alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Z\,\mathrm{d}\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + uM(\varphi_1-\varphi_0). \tag{14}$$

(13) + (14) 得

$$\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}Z_1^2 < -\alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Z\,\mathrm{d}\varphi - \int_{\varphi_0}^{\zeta} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + uM(\varphi_1-\varphi_0) + uM(\varphi_1-\zeta)$$

$$< -\alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Z\,\mathrm{d}\varphi - \int_{\varphi_0}^{\zeta} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + 2uM(\varphi_1-\varphi_0).$$

因为 $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Z\,\mathrm{d}\varphi > \frac{1}{2}Z_1(\varphi_1-\varphi_0)$, 所以上式可化为

$$\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}Z_1^2 < -\frac{\alpha}{2}Z_1(\varphi_1-\varphi_0) - \int_{\varphi_0}^{\zeta} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + 2uM(\varphi_1-\varphi_0)$$

$$< \left(-\frac{\alpha}{2}Z_1 + 2uM\right)(\varphi_1-\varphi_0) = -\frac{\alpha}{2}\left(Z_1 - \frac{4uM}{\alpha}\right)(\varphi_1-\varphi_0).$$

由假设 $Z_1 \geq \frac{4uM}{\alpha}$, 所以 $\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}Z_1^2 < 0$, 即 $|\eta| < Z_1$.

引理5　当 $|Z| > \frac{2uM}{\alpha}$ 时, 系统(5)的轨线由外向内的通过曲线 $V = \frac{1}{2}Z^2 + \int_0^{\varphi} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$.

证明　上述 V 函数为定正的, 且曲线 $V = C$ 同时对称于 φ 轴 Z 轴, 从而关于原点对称, 且有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + g(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -f(\varphi,Z)Z^2 + Zue(t)$$

$$< -\alpha|Z|^2 + uM|Z| = |Z|(-\alpha|Z| + uM) < 0.$$

引理6 在上半柱面,系统(5)的轨线均自外部穿入系统(7)的轨线,在下半柱面,系统(5)的轨线均自外部穿入系统(8)的轨线.

证明 系统(7)的轨线为 $u(\varphi, Z) = \frac{Z^2}{2} + \alpha\int_0^{\varphi} Z(s)\,ds + \int_0^{\varphi} g(s)\,ds - uM\varphi = C$. 沿着系统(5)的轨线的方向导数为

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(5)} = \frac{\partial u}{\partial Z}\frac{dZ}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = Z^2(\alpha - f(\varphi, Z)) + Z(ue(t) - uM) < 0,$$

类似地,在下半柱面,系统(8)的轨线为

$$w(\varphi, Z) = \frac{Z^2}{2} + \alpha\int_0^{\varphi} Z(s)\,ds + \int_0^{\varphi} g(s)\,ds + uM\varphi = C,$$

$$\left.\frac{dW}{dt}\right|_{(5)} = z[-f(\varphi, Z)Z - g(\varphi) + ue(t)] + (\alpha Z + g(\varphi) + uM)Z$$

$$= Z^2(\alpha - f(\varphi, Z)) + Z(ue(t) + uM) < 0.$$

现在证明定理4, 在 φ Z 平面上, 作关于原点对称的闭曲线 Γ, 作法如下: 过点 $A\left(\varphi_0, \frac{4uM}{\alpha}\right)$ 作系统(7)的轨线 $\overleftarrow{AB}$, 它与 φ 轴交于点 $B(\varphi_1, 0)$, 由引理2知 $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi^*$, 过 B 点作系统(8)的轨线 $\overleftarrow{BC}$, 则 $\overleftarrow{ABC}$ 上的一切点的纵坐标 $|Z| < \frac{4uM}{\alpha}$ (引理4), 在 AC 的延长线上取点 D, 使 $AH = DH$, 则 D 点坐标为 $D\left(\varphi_0, -\frac{4uM}{\alpha}\right)$, 过点 A 作曲线 $\frac{Z^2}{Z} + \int_0^{\varphi} g(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{4uM}{\alpha}\right)^2 + \int_0^{\varphi_0} g(\varphi)\,d\varphi$, 由于对称性, 此曲线必交直线 $\varphi = -\varphi_0$ 于 $D'\left(-\varphi_0, \frac{4uM}{\alpha}\right)$, 显然 $D\left(\varphi_0, \frac{-4uM}{\alpha}\right)$ 与 $D'\left(-\varphi_0, \frac{4uM}{\alpha}\right)$ 关于原点对称, 然后关于原点对称原则, 作闭曲线 Γ 的其它部分 $DA'B'C'D'$, 由此得到 Γ: $ABCDA'B'C'D'A$, 由引理1知 $B'C'$ 是系统(7)的轨线, $A'B'$ 是系统(8)的轨线. 由引理5知沿曲线 AD', DA', 系统(5)的轨线均指向 Γ 内部, 又由引理6知沿曲线 ABC, $A'B'C'$, (5)的轨线也均指向 Γ 内部; 在线段 CD 上, 有 $\frac{d\varphi}{dZ} = Z < 0$, 系统(5)的轨线也穿入内部, 只有 B, B' 点上, 系统(5)的方向与 Γ 相切, 但它不是从内向外穿出, 因此, 轨线进入由 Γ 所界的区域 Ω 之后 就永远不会走出此区域, 因此 Ω 是最终有界区域, 因此对(5)的任一解 $(\varphi(t), Z(t))$ 都存在 t_0, 使得对 $t \geq t_0$ 都有 $|\varphi(t)| \leq L_1$, $|Z(t)| \leq L_2$.

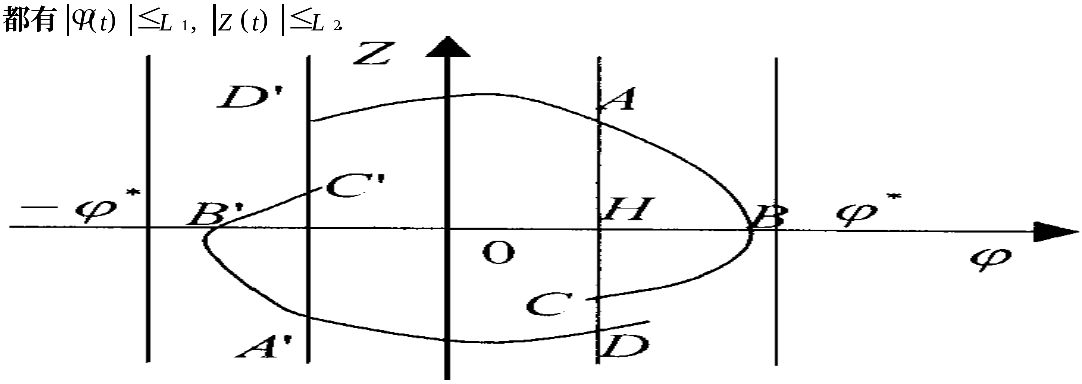

图 6

定理5 设系统(5)满足定理4的条件,且

1) $f(\varphi, Z) \le \alpha^*$, $f'(\varphi, Z) \le C$, $\beta \le g'(\varphi) \le \beta_*$;

2) $\alpha[2(\beta^* - \beta) + (\alpha^* - \alpha) + C(2L_1 + L_2)] + (\beta + 1)(2CL_2 + \beta^* - \beta + 2(\alpha^* - \alpha) < 2\alpha\beta$,

则系统(4)存在概周期解,且是一致渐近稳定的.

证明 由定理4,对一切 $t \ge t_0$,系统(5)的解$(\varphi(t), Z(t)) \subset \Omega$,又由定理1知,方程(5)有解$(\overline{\varphi}(t), \overline{Z}(t))$,对一切 $t \in R$ 都包含在 Ω 中,现先证明$(\overline{\varphi}(t), \overline{Z}(t))$在 Ω 中是一致渐近稳定的. 令

$$\begin{cases} u = \varphi(t) - \overline{\varphi}(t), \\ v = Z(t) - \overline{Z}(t). \end{cases}$$

于是方程(5)可化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -[\overline{Z}f'_{\varphi}(\overline{\varphi}, \overline{Z}) + g'(\overline{\varphi})]u - [f(\overline{\varphi}, \overline{Z}) + \overline{Z}f'_{Z}(\overline{\varphi}, \overline{Z})]v + \Phi(u, v) \end{cases}.$$

其中 $\Phi(u, v)$是关于 u, v 的高次项所组成的. 我们把上述方程组化成如下形式,并去掉高次项

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta u - \alpha v - \overline{Z}f'_{\varphi}(\overline{\varphi}, \overline{Z})u - (f(\overline{\varphi}, \overline{Z}) - \alpha)v - (g'(\overline{\varphi}) - \beta)u - \overline{Z}f'_{Z}(\overline{\varphi}, \overline{Z})v. \end{cases} \tag{15}$$

取李雅普诺夫函数 $V = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2$,其中 $a_{11} = \beta^2 + \beta + \alpha^2$, $a_{12} = \alpha$, $a_{22} = \beta + 1$. 容易证明 V 是正定的二次型,且

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} &= -2\alpha\beta(u^2 + v^2) - (2a_{12}u + 2a_{22}v)[\overline{Z}f'_{\varphi}(\overline{\varphi}, \overline{Z})u + \\ &\quad (f(\overline{\varphi}, \overline{Z}) - \alpha)v + (g'_{\varphi}(\overline{\varphi}) - \beta)u - \overline{Z}f'_{Z}(\overline{\varphi}, \overline{Z})v] \\ &= -2\alpha\beta(u^2 + v^2) - 2a_{12}[\overline{Z}f'_{\varphi}(\overline{\varphi}, \overline{Z})u^2 + (f(\overline{\varphi}, \overline{Z}) - \alpha)uv + \\ &\quad (g'(\overline{\varphi}) - \beta)u^2 - \overline{Z}f'_{Z}(\overline{\varphi}, \overline{Z})uv - 2a_{22}[\overline{Z}f'_{\varphi}(\overline{\varphi}, \overline{Z})uv + \\ &\quad (f(\overline{\varphi}, \overline{Z}) - \alpha)v^2 + (g'_{\varphi}(\overline{\varphi}) - \beta)uv + \overline{Z}f'_{Z}(\overline{\varphi}, \overline{Z})v^2] \\ &\le -2\alpha\beta(u^2 + v^2) + [2\alpha(\beta^* - \beta) + \alpha(\alpha^* - \alpha) + \alpha CL_2 + \\ &\quad 2\alpha CL_1 + (\beta + 1)[2CL_2 + \beta^* - \beta + 2(\alpha^* - \alpha)](u^2 + v^2) < 0 \end{aligned}$$

所以方程(15)的零解是一致渐近稳定的,从而(5)的解$(\overline{\varphi}(t), \overline{Z}(t))$是一致渐近稳定的,注意到(5)的右端满足李普希兹条件,根据定理2知道$(\overline{\varphi}(t), \overline{Z}(t))$是渐近概周期的,其概周期部分$(\widetilde{\varphi}(t), Z(t))$即为(5)在 Ω 中的概周期解,由于一致渐近稳定性是可继承的,因此概周期解$(\widetilde{\varphi}(t), Z(t))$也是一致渐近稳定的.

2 概周期解的唯一性

定理6 设系统(5)满足定理4-5的条件,且 $f(0, 0) = b$,则系统(5)存在唯一的概周期解.

证明 为了证明系统(5)的概周期解的唯一性,仅需证明系统(5)是非常稳定的. 假设$(\varphi_1(t), Z_1(t))$和$(\varphi_2(t), Z_2(t))$是(5)的任意二个解. 这里,当 $t \ge t_0$时,有 $|\varphi_i(t)| \le L_1$, $|Z_i(t)| \le L_2$ $(i = 1, 2)$,把他们代入方程得到

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = Z_1 \\ \dfrac{dZ_1}{dt} = -f(\varphi_1, Z_1)Z_1 - g(\varphi_1) + ue(t); \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_2}{dt} = Z_2, \\ \dfrac{dZ_2}{dt} = -f(\varphi_2 Z_2)Z_2 - g(\varphi_2) + ue(t). \end{cases} \tag{17}$$

(16) - (17) 得:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = Z_1 - Z_2, \\ \dfrac{d(Z_1 - Z_2)}{dt} = f(\varphi_2, Z_2)Z_2 - f(\varphi_1, Z_1)Z_1 + g(\varphi_2) - g(\varphi_1). \end{cases} \tag{18}$$

把(18)式的右端改写成:

$$\begin{aligned} & f(\varphi_2 Z_2)Z_2 - f(\varphi_1 Z_1)Z_1 + g(\varphi_2) - g(\varphi_1) = -f(\varphi_1 Z_1)Z_1 + f(\varphi_2 Z_2)Z_1 - \\ & \quad f(\varphi_2 Z_2)Z_1 + f(\varphi_2 Z_2)Z_2 + g(\varphi_2) - g(\varphi_1) \\ & = -f(\varphi_2 Z_2)(Z_1 - Z_2) - [f'_\varphi(\varphi_1 + \theta_1(\varphi_2 - \varphi_1), Z_1 + \theta_1(Z_2 - Z_1))(\varphi_1 - \varphi_2)]Z_1 - \\ & \quad [f'_Z(\varphi_1 + \theta_1(\varphi_2 - \varphi_1), Z_1 + \theta_1(Z_2 - Z_1))(Z_1 - Z_2)]Z_1 - g'(\varphi_1 + \theta_2(\varphi_2 - \varphi_1))(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

这里$0 < \theta_i < 1 \quad (i = 1, 2)$.

令 $x = \varphi_1 - \varphi_2$, $y = Z_1 - Z_2$, $h_i(t) = \varphi_1(t) + \theta_i(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$, $l(t) = Z_1(t) + \theta_1(Z_2(t) - Z_1(t))$, 这里 $|h_i(t)| \leq L_1$, $|l(t)| \leq L_2$. 于是(18)可化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -[Z_1 f'_\varphi(h_1(t)l(t)) + g'(h_2(t))]x - [f(\varphi_2 Z_2) + Z_1 f'_Z(h_1(t)l(t))]y. \end{cases} \tag{19}$$

因为 $f(0, 0) = b$, $g'(0) = 1$, 把(19)改写为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - by + [1 - g'(h_2(t)) - Z_1 f'_\varphi(h_1(t)l(t))]x + \\ \qquad [b - f(\varphi_2, Z_2) - Z_1 f'_Z(h_1(t)l(t))]y. \end{cases} \tag{20}$$

为了表达方便, 把(20)写成矩阵形式

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u} + B(t)\vec{u}, \tag{21}$$

这里

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - g'(h_2(t)) - Z_1 f'_\varphi(h_1(t)l(t)) & b - f(\varphi_2, Z_2) - Z_1 f'_Z(h_1(t)l(t)) \end{pmatrix},$$

(21) 对应的齐线性方程组

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u} \tag{22}$$

是全局渐近稳定的, 因为$\tilde{A}$ 的特征根均具负实部. 此外,$B(t)$满足定理3的条件, 所以(21)**的解是全局渐近稳定的, 因此方程组**(5)**是非常稳定的, 即**(5)**的概周期解**$(\tilde{\varphi}(t), \tilde{Z}(t))$**是唯一的(在柱面$H$内).**

参 考 文 献

[1] Jin Jun. *Existence Uniqueness and Asymptotic Stability of Periodic Solutions of a Nonlinear Equation in Phase Locked Technoloy* [J]. AetaMath, Appl. Sinaca, 1991, **7**(1)

[2] **王联, 王慕秋. 非线性常微分方程定性分析** [M]. **哈尔滨工业大学出版社**, 1987.

[3] **何崇佑. 概周期微分方程** [M]. **北京: 高等教育出版社**, 1992.

[4] R. **贝尔曼. 微分方程的解的稳定性理论** [M]. **张燮译**, **北京: 科学出版社**, 1957.

Existence, Uniqueness and Asymptotic Stability of Almost Periodic Solution of an Almost Periodic Equation in Phase Locked Technology

Jin Jun

(Shanghai Teachers' University)

Abstract

In this paper, we stady the existence, uniqueness and asymptotic stability of almost periodic solution of an almost periodic equation in phase locked technology. We obtain some sufficient conditions which guarantee the existence, uniqueness and asymptotic stability of the almost periodic solution of the system.

Keywords almost periodic system, plase locked loop equation, almost periodic solution, existence and uniqueness, asymptotic stability.