第19卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 19 No. 2
1999年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1999

关于"四元数分析中的 Neumann 边值问题"的注记*

杨 丕 文
(四川师范大学数学系, 成都610066)

摘　要: 本文指出了文[1]中的几个错误, 并利用 $\bar{\partial}$-方程解的积分表示, 获得了其所讨论的超球上的四元数方程的Neumann 问题解的积分表示.

关键词: 四元数分析, Neumann 问题, 积分表示
分类号: AMS(1991) 30G30/CLC O175.8
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0418-03

文献[2]中引入了平面有界区域 G 上定义的函数 $f(z)(\in L^1(\bar{G}))$ 的积分算子:

$$
\begin{aligned}
Tf &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi d\eta \\
\bar{T}f &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\,d\xi d\eta
\end{aligned}
\tag{1}
$$

当 $z\in G$ 时,

$$
\frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial \bar{T}f}{\partial z} = f. \tag{2}
$$

而当 $z \bar{\in} \bar{G}$ 时, Tf 关于 z, $\bar{T}f$ 关于 $\bar{z}$ 解析, 即有

$$
\frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}f}{\partial z} = 0. \tag{3}
$$

当 $z\in G$, $\omega\in C(\bar{G})$ 和 $\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\in L_p(G)$, $p>2$ 时,

$$
\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - T\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} \tag{4}
$$

文[1]讨论了四元数分析中超球上的Neumann 边值问题. 在其定理1中, 对 R^4 中连通开集 $D(0\in D)$ 上满足方程 $\bar{\partial}f = g$ 的 f, 给出了一个全虚部 $Y(f)$ 由全实部 $X(f)$ 及 $g(x)$ 的积分表示. 由于论证中公式(2), (4)的使用错误, 其所得结论是错误的, 对于一般区域 D, 所得积分表示式是不成立的.

设

$$
\begin{aligned}
&P_X: R^4 \to R^2,\ P_X x = P_X(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2), \\
&P_Y: R^4 \to R^2,\ P_Y x = (x_3, x_4).
\end{aligned}
$$

---

* **收到日期**: 1995-12-05
作者简介: 杨丕文(1950-), 男, 四川大邑县人, 硕士, 四川师范大学副教授.

当存在 $x\in D$，使 $P_X x\bar{\in} D_X$ 时，这里 $D_X=\{x \mid x\in D, x_3=x_4=0\}$，按[1]中积分算子 $\overline{T}_X, T_X$ 的定义，由(3)应有

$$\partial_X \overline{T}_X g(x)=0, \quad \partial_X T_X g(x)=0,$$

此时[1]中(4)式不成立 对算子 $T_Y g$ 及 $\overline{T}_Y g$ 也有类似结果

在其定理1的证明中，在(9)的第二个等号使用了公式

$$T_Y \partial_Y u = u(x)+\Phi(x), \tag{5}$$

其中 $\Phi(x)$ 满足 $\partial_Y \Phi(x)=0$，此即本文的公式(4). 记

$$U=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_3=x_3^0, x_4=x_4^0)\},$$

这里 x_3^0, x_4^0 是确定的实数，即 U 是 R^4 中平行于坐标平面 $x_3 O x_4$ 的超平面 显然公式(5)当且仅当

$$P_Y(U\cap D)=D_Y \tag{6}$$

时才能成立 从而可以得出，[1]中定理1只有在其区域 D 满足条件(6)与条件 $P_X D\subset D_X$, $P_Y D\subset D_Y$ 时才能成立 当 D 是 R^4 中的单位超球时，由于条件(6)不满足，定理1中积分表示也不能成立

文[1]中定理1所讨论的已知 $\bar{\partial} f=g$，其 $Y(f)$ 由 g 及 $X(f)$ 表示问题，当 D 是一有界区域并当其边界为分片光滑时，在 C^2 空间中利用多复变函数中众所周知的 Marlinelli-Bochner 公式即可获得 [1]中(6)，(7)即 C^2 空间中如下类型的等式

$$\frac{\partial u}{\partial z_1}=f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z_2}=f_2.$$

以上两式两边分别对 z_1 取共轭，再利用 Marlinelli-Bochner 公式，u 即可由 f_1, f_2 积分表示

而在其文章后一部分讨论超球上的 Neumann 问题中，利用 Poisson 方程的 Neumann 问题的 Green 函数，获得了 $X(\omega)(x)$. 要求出问题的解 $\omega(x)$，需利用 $X(\omega)$ 及 $g(x)$，通过解超定方程(6)，(7)，求出 $Y(\omega)$. 这是同定理1中已知 f, g，求 $Y(f)$ 由 g 及 $X(f)$ 积分表示完全不同的问题 正如多复变函数中的 Marlinelli-Bochner 公式通常并不能作为相应的 $\bar{\partial}$-方程的解一样. 利用 C^2 空间中超球上 $\bar{\partial}$-方程的解的积分表示，可以解决这一问题，我们将结果写成下列两个定理

定理1 设 Ω 是 C^2 空间中的单位超球 Ω 上超定方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_1}=f_1(z_1,z_2), \quad \frac{\partial \omega}{\partial z_2}=f_2(z_1,z_2), \tag{7}$$

其中 $f_1, f_2\in C^1(\Omega)$, $f_1, f_2, \frac{\partial f_1}{\partial z_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_1}\in L^p(\overline{\Omega})$, $p\geq 1$，且满足相容性条件 $\frac{\partial f_1}{\partial z_2}=\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_1}$，则

$$\omega_0=\overline{T}_{G_1} f_1+T_{G_2} f_2-\overline{T}_{G_1} T_{G_2}\frac{\partial f_1}{\partial z_2} \tag{8}$$

是(7)的一个特解 这里 G_1, G_2 分别为 z_1, z_2 平面的单位圆盘，积分算子 $\overline{T}_{G_1}, T_{G_2}$ 如(1)定义，其一般解为

$$\omega=\omega_0+\Phi(\overline{z_1}, z_2), \tag{9}$$

其中 $\Phi(z_1,z_2)$ 是 Ω 上任一二元解析函数

定理2 文[1]所考察的 Neumann 问题，当 $g(x)$ 满足可解条件(31)，且 $g(x)$ 及其一阶偏

微商均属于$L^p(\Omega)\ (p\geq 1)$时, 问题可解. 其解$\omega(x)$时全实部$X(\omega)(x)$如(32)所示, 而全虚部

$$Y(\omega)(x)=T_{G_1}\overline{f_1}+\overline{T}_{G_2}\overline{f_2}-T_{G_1}\overline{T}_{G_2}\frac{\partial\overline{f_1}}{\partial\overline{Y}}+\overline{\Phi(\overline{X},Y)}.$$

其中

$$f_1=-\partial_Y X(f)+\frac{1}{2}Y(g),\quad f_2=\partial_X X(f)+\frac{1}{2}X(g).$$

参 考 文 献

[1] 张万国. 四元数分析中的Neumann边值问题[J]. 数学年刊A辑, 1992, **3**(13): 386- 392.

[2] Векуа И Н. Обобщенны аналитическде функции. Москва: ФдэМаг Гдэ, 1959.

Remark on "Neumann Boundary Value Problem in the Quaternion Calculus"

Yang Piwen

(Dept. of Math., Sichuan Normal University, Chengdu 610066)

Abstract

This paper points out a few of faults in the article [1]. By using the integral representation of solution of the $\overline{\partial}$-equation, we obtain the integral representation of solution of the Neumann boundary value problem in the unit ball for a quaternion equation discussed in [1].

Keywords quaternion calculus, Neumann problem, integral representation.