W-Like空间可数积的Lindelöf 性质*

彭 良 雪
(首都师范大学数学系, 北京100037)

摘 要: (1) X 是W-Like空间, 则 bX 是Lindelöf空间; (2) 若 $X_n, n\in N$ 是W-Like空间, 则 $\prod_{n\in N} X_n$ 是Lindelöf空间.

关键词: K-Like空间, $b(X, \mathbf{T})$.
分类号 AMS(1991) 54B10/CLC O189.11
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0428-03

1 引 言

在[1], [4]中引入并讨论了K-Like空间, 证明了紧-Like空间的有限积是Lindelöf空间, 人们自然想到可数积问题, 本文证明了W-Like空间的可数积是Lindelöf空间.

让K是空间类, 满足 $X\in\mathbf{K}$, 则闭子集族 $2^X\subseteq\mathbf{K}$.

I-代表所有单点空间及空集构成的类;

W-所有可数空间类.

定义 $\alpha\in\omega^2$ 为偶数(奇数): 如果有 $n\in\omega, k\in\omega$, 使 $\alpha=n\omega+2k\ (n\omega+2k+1)$.

定义1 有两局中人 Ⅰ 与 Ⅱ, 交替选取 X 的子集构成序列 $(E_\alpha: \alpha\in\omega^2)$ 中的相邻项, 使得每个局中人选择 $E_{\alpha+1}$ 时已经知道 $\mathbf{K}, E_0, E_1, \cdots, E_\alpha, \alpha<\omega^2$. 若满足下述条件, 则称 $(E_\alpha: \alpha\in\omega^2)$ 为 $G^*(\mathbf{K}, X)$ 中的局. $E_0=X$, 对 $\alpha\in\omega, n\in\omega$, 有:

(1) $E_{n\omega+2\alpha+1}$ 是局中人 Ⅰ 选取的;

(2) $E_{n\omega+2\alpha}$ 是局中人 Ⅱ 选取的;

(3) $E_{n\omega+2\alpha+1}\in\mathbf{K}$;

(4) $E_{n\omega+2\alpha}\in 2^X$;

(5) $E_{n\omega+2\alpha+1}\subset E_{n\omega+2\alpha}$;

(6) $E_{n\omega+2\alpha+2}\subset E_{n\omega+2\alpha}$;

(7) $E_{n\omega+2\alpha+2}\cap E_{n\omega+2\alpha+1}=\varnothing$;

(8) $E_{n\omega}=\bigcap_{\substack{m<n\\ \alpha\in\omega}} E_{m\omega+2\alpha}, n\geq 1$.

若 $\cap\{E_{n\omega+2\alpha}: n\in\omega, \alpha\in\omega\}=\varnothing$, 则称局中人 Ⅰ 赢. 若 $S(E_0, E_1, \cdots, E_{n\omega+2\alpha})=E_{n\omega+2\alpha+1}$, 则称 S 是 I 的策略, 若 I 用 S 能赢每一局, 称 S 是 I 赢的策略, 记 $S\in\mathbf{I}^*(\mathbf{K}, X)$, ($\mathbf{I}^*(\mathbf{K}, X)$ 为 I 的赢的策

* 收稿日期: 1995-03-13; 修订日期: 1998-03-18

略集), 此时称 X 为 $\mathcal{K}^*$-Like 空间 当每一局都形如 $(E_n: n\in\omega)$ 时, $\mathcal{K}^*$-Like 就是[1]中的 $\mathcal{K}$-Like 空间

定义2[2] 给定拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$, $b(X,\mathcal{T})$ 代表由 $(X,\mathcal{T})$ 的 G_δ-集生成的拓扑, 有时 $\mathcal{T}$ 没有提到, 用 bX 代表 $b(X,\mathcal{T})$.

定理3[5] X_n 是 Lindelöf P-空间, $n\in\mathbf{N}$, 则 $\prod_{n\in\mathbf{N}} X_n$ 是 Lindelöf 空间

定理4 X 是 $\mathcal{W}$-Like 空间, 则 X 是 $\mathcal{I}^*$-Like 空间

证明 令 $S\in\mathcal{I}(\mathcal{W},X)$, $E_0=A_0=X$, 下面定义 $t\in\mathcal{I}^*(\mathcal{I},X)$, $E_1=S(E_0)\in\mathcal{W}$. 令 $E_1=\{x_k^1: k\in\mathbf{N}\}$, $A_1=t(A_0)=\{x_1^1\}$. 对 $p\in\omega^2$, p 是奇数及 $n\in\omega$, 有 $G^*(\mathcal{I},X)$ 中容许列 $(A_0,A_1,\cdots,A_p)$ 与 $G(\mathcal{W},X)$ 中容许列 $(E_0,E_1,\cdots,E_{2n+1})$ 满足 $E_{2m+1}=S(E_0,E_1,\cdots,E_{2m})=\{x_k^{2m+1}: k\in\mathbf{N}\}$, $m\le n$. 对 $q<p$, q 是偶数, 有最小的 $m\le n$, 使 $E_{2m+1}\cap A_q\neq\varnothing$. 令 $k_q=\min\{k: x_k^{2m+1}\in A_q, k\in N\}$. $A_{q+1}=\{x_{k_q}^{2m+1}\}=t(A_0,\cdots,A_q)$, $A_p\cap E_{2m+1}=\varnothing\ (m<n)$, 对 X 中的闭集 A_{p+1}, $(A_0,A_1,\cdots,A_p,A_{p+1})$ 是 $G^*(\mathcal{I},X)$ 中容许列 若 $A_{p+1}\cap E_{2n+1}\neq\varnothing$, 令 $A_{p+2}=\{x_{k_{p+1}}^{2n+1}\}$, 其中 $k_{p+1}=\min\{k: x_k^{2n+1}\in A_{p+1}, k\in\mathbf{N}\}$. 若 $A_{p+1}\cap E_{2n+1}=\varnothing$, 令 $E_{2n+2}=A_{p+1}$, $A_{p+2}=\{x_1^{2n+3}\}$, 其中 $E_{2n+3}=S(E_0,\cdots,E_{2n+2})=\{x_k^{2n+3}: k\in\mathbf{N}\}$. 定义 $t(A_0,\cdots,A_p,A_{p+1})=A_{p+2}$. 如此进行下去, 得到 $G^*(\mathcal{I},X)$ 中局 $(A_0,A_1,\cdots,A_p,A_{p+1},\cdots)$ 及 $G(\mathcal{W},X)$ 中局 $(E_0,E_1,\cdots,E_n,\cdots)$ 满足 $t(A_0,\cdots,A_{p+1})=A_{p+2}$, $p\in\omega^2$ 是奇数 $E_{2n+1}=s(E_0,\cdots,E_{2n})$, $n\in\mathbf{N}$. 任意 $n\in\mathbf{N}$, 存在 $p\in\omega^2$, p 是奇数, 使 $A_{p+1}=E_{2n}$. 而 $\cap E_{2n}=\varnothing$, 因此 $\cap\{A_q: q\in\omega^2, q$ 是偶数$\}=\varnothing$. 因此 $t\in\mathcal{I}^*(\mathcal{I},X)$, X 是 $\mathcal{I}^*$-Like 空间

在[4]中给出了 $\mathcal{W}$-Like 非 $\mathcal{I}$-Like 的例子, 上述定理说明 $\mathcal{I}^*$-Like 未必是 $\mathcal{I}$-Like 空间

规定若 $d(u)=(E_0,E_1,\cdots,E_n)$, $d(u)\oplus E_{n+1}=(E_0,\cdots,E_n,E_{n+1})$.

定理5 $(X,\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{W}$-Like 空间, 则 bX 是 Lindelöf 空间

证明 由定理4知, X 是 $\mathcal{I}^*$-Like 空间, 令 $s\in\mathcal{I}^*((\mathcal{I},X)$. 设 $\mathcal{U}$ 是 bX 基中元素构成的开覆盖 $E_0=X$, $E_1=s(E_0)=\{x_{E_0}\}$, 则存在 $u_{E_0}\in\mathcal{U}$, 使 $x_{E_0}\in u_{E_0}$. 令 $d(u_{E_0})=(E_0,E_1)$, $\mathcal{U}_1=\{u_{E_0}\}$. $X\setminus u_{E_0}=\cup\mathcal{F}_{u_{E_0}}$, 令 $\mathcal{F}_2=\mathcal{F}_{u_{E_0}}$, $|\mathcal{F}_2|\le\omega$ 任意 $F\in\mathcal{F}_2$, 则 (E_0,E_1,F) 是 $G^*(\mathcal{I},X)$ 中容许列, 记 $s(E_0,E_1,F)=\{x_F\}$, 则存在 $u_F\in\mathcal{U}$, 使 $x_F\in u_F$. 令 $\mathcal{U}_3=\{u_F: F\in\mathcal{F}_2\}$. 记 $d(u_F)=(E_0,E_1,F,\{x_F\})$, $u_F\in\mathcal{U}_3$, 则 $|\mathcal{U}_3|\le\omega$

如此进行下去, 对 $p\in\omega^2$, p 是奇数已有 $\mathcal{U}_q$, $q\le p$, q 是奇数及闭集族 $\mathcal{F}_m$, m 是小于 p 的偶数 满足 $\mathcal{U}_q\subseteq\mathcal{U}$, $|\mathcal{U}_q|\le\omega$, $|\mathcal{F}_m|\le\omega$ 任意 $u\in\mathcal{U}_q$, 有容许列 $d(u)=(E_0^u,E_1^u,\cdots,E_{q-1}^u,E_q^u)$, $E_q^u\subseteq u$. $\mathcal{F}_m=\cup\{\mathcal{F}_u: u\in\mathcal{U}_{m-1}\}$, $|\mathcal{F}_u|\le\omega$, $u\in\mathcal{U}_{m-1}$. 对 $F\in\mathcal{F}_u$, $u\in\mathcal{U}_{m-1}$, $d(u)+F$ 构成容许列 对 $u\in\mathcal{U}_{m-1}$, 若 $d(u)=(E_0^u,E_1^u,\cdots,E_{m-2}^u,E_{m-1}^u)$, $\cup\mathcal{F}_u=E_{m-2}^u\setminus u$.

下面构造 $\mathcal{U}_{p+1}$, 对 $u\in\mathcal{U}_p$, 令 $d(u)=(E_0^u,E_1^u,\cdots,E_{q-1}^u,E_q^u)$, 由于 $E_q^u\subset u$, 且 u 是 G_δ 集, 故有 $E_{q-1}^u\setminus u=\cup\mathcal{F}_u$, 其中 $\mathcal{F}_u$ 是可数闭集族 令 $\mathcal{F}_{p+1}=\cup\{\mathcal{F}_u: u\in\mathcal{U}_p\}$, 对 $F\in\mathcal{F}_{p+1}$, 有 $u\in\mathcal{U}_p$, 使 $d(u)\oplus F$ 构成 $\mathcal{I}^*(\mathcal{I},X)$ 中容许列, 令 $s(d(u)\oplus F)=\{x_F\}$, 有 $u_F\in\mathcal{U}$, 使 $x_F\in u_F$, 令 $d(u_F)=d(u)\oplus F\oplus\{x_F\}$. $\mathcal{U}_{p+2}=\{u_F: F\in\mathcal{F}_{p+1}\}$, $|\mathcal{U}_{p+2}|\le\omega$.

如此进行下去, 对 ω^2 中奇数 p, 有可数开集族 $\mathcal{U}_p\subset\mathcal{U}$, 下证 $\mathcal{V}=\cup\{\mathcal{U}_p: p$ 是 ω^2 中的奇数$\}$ 是 X 的覆盖

假若有 $x\notin\cup\mathcal{V}$, 则 $x\notin u_{E_0}$, 因此有 $F_2\in\mathcal{F}_2$, 使 $x\in F_2$. 如此进行下去, 对 $m\in\omega^2$, m 是偶

数, 有 $F_n\in\mathbf{F}_n$, $x\in F_n$, $n\leq m$, n 是偶数, 且 $u\in\mathbf{U}_{n+1}$, 使得 $d(u)=(F_0,\{x_{F_0}\},\cdots,F_n,\{x_{F_n}\})$, 其中 $F_0=X$, $\{x_{F_q}\}=s(F_0,\{x_{F_0}\},\cdots,F_q)$, $q\leq n$, q 是偶数. 由于 $x\notin\cup\mathbf{U}_{m+1}$, 而 $x\in F_m$, 因此有 $F\in\mathbf{F}_{m+2}$, 使 $x\in F$, 令 $F=F_{m+2}$. 令 $d(u)\oplus F_{m+2}$ 是容许列, 由上述构造可知, 有 $u'\in\mathbf{U}_{m+3}$, 使 $d(u')=d(u)\oplus F_{m+2}\oplus s(d(u)\oplus F_{m+2})$. 如此有 $\mathrm{I}^*(\mathrm{I},X)$ 中局 $(F_0,\{x_{F_0}\},\cdots,F_n,\{x_{F_n}\},\cdots)$, $x\in\cap\{F_n: n\in\omega, n$ 是偶数$\}$, 矛盾, 故此 $\cup\mathbf{V}=X$, X 是 Lindelöf 空间.

定理6 $(X_n,\mathbf{T}_n)$ 是 **W**-Like 空间, $n\in\mathbf{N}$, 则 $\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ 是 Lindelöf 空间.

证明 对 $n\in\mathbf{N}$, 知道 bX_n 是 Lindelöf 空间, 由定理3知 $\prod_{n\in\mathbf{N}}bX_n$ 是 Lindelöf 空间. $f:\prod_{n\in\mathbf{N}}bX_n\to\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ 恒同映射是连续映射, 故此 $\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ 是 Lindelöf 空间.

推论7 对 $n\in\mathbf{N}$, 若 $(X_n,\mathbf{T}_n)$ 是 **I**-Like 空间, 则 $\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ 是 Lindelöf 空间.

推论8 对 $n\in\mathbf{N}$, $(X_n,\mathbf{T}_n)$ 是 Lindelöf **W**-散布正则空间, 则 $\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ 是 Lindelöf 空间.

证明 Lindelöf **W**-散布空间是 **W**-Like 空间(参见[1]), 并由定理可知此推论成立.

参 考 文 献

[1] Telgarsky R. *Space defined by topological games* [J]. Fundamenta Mathematicae, 1975, LXXXVIII (3): 193-223.

[2] Hdeib H Z and Pareek C M. *A generalization of scattered spaces* [J]. Topology Proceedings, 1989, **14**: 59-74.

[3] Telgarsky R. *C-scattered and paracompact spaces* [J]. Fundamenta Mathematical, 1971, LXXIII: 59-74.

[4] Morita K, Nagata J. eds, *Topics in General Topology* [M]. Elsever Science Publishers B. V., 1989, 523-562.

[5] Noble N. *Products with closed projections* [J]. II Trans Amer. Math. Soc, 1971, **160**: 169-183.

The Lindelöf Property of Countable Products of W-Like Spaces

Peng Liangxue

(Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037)

Abstract

(1) If X is **W**-like space, then bX is Lindelöf space; (2) If X_n is **W**-like space, $n\in N$, then $\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ is Lindelöf space.

Keywords **K**-like space, $b(X,\mathbf{T})$.