第19卷第2期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 2
1999年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1999

复射影空间的实2-调和超曲面*

孙弘安 钟定兴
(南方冶金学院, 江西赣州341000) (赣南师范学院)

摘 要: 本文研究了复射影空间中的实2-调和超曲面和实极小超曲面之间的关系, 推广了Lawson H. B 和Kon M. 关于实极小超曲面的Pinching 结果

关键词: 复射影空间, 实2-调和超曲面, Pinching.
分类号: AMS(1991) 58E20/CLC O186. 12
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)02-0431-06

1 引 言

根据J. Eells 和L. Lemaire 的设想, 姜国英在文[1, 2]两文中讨论了黎曼流形间的2-调和映照, 给出了2-调和映照所应满足的条件, 并确定了目标流形为单位球面和复射影空间时的2-调和等距浸入的若干性质. 为方便起见, 称2-调和等距浸入的子流形为2-调和子流形. 由[2]知, 2-调和子流形是极小子流形的推广.

文[6]研究了单位球面中的2-调和超曲面, 获得了类似J. Simons 关于极小超曲面的Pinching 定理. 本文研究复射影空间中的实2-调和超曲面, 讨论了实2-调和超曲面与实极小超曲面的关系(定理1), 推广了Lawson H. B[3]和Kon. M. [4]关于实极小超曲面的Pinching 结果(定理2, 定理3).

2 基本理论和公式

设CP^n是具备Fubini-study 度量的复n维射影空间, 它的常数全纯截面曲率为4. 用S^m表示m维单位球面, 则存在Hopf 纤维化$\bar{\pi}: S^{2n+1}\to CP^n$, 它是一个全测地纤维的Riemann Submersion[3]. 如所知, 在S^{2n+1}中存在Clifford 超曲面:

$$\bar{M}_{2p+1,2q+1}=S^{2p+1}\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2n}}\right)\times S^{2q+1}\left(\sqrt{\frac{2q+1}{2n}}\right), p+q=2n-1.$$

若使它的纤维都位于复子空间中, 则就有一个与$\bar{\pi}$相容的Riemann Submersion $\pi: \bar{M}_{2p+1,2q+1}$

* **收稿日期**: 1996-04-15
基金项目: 江西省自然科学基金资助项目
作者简介: 孙弘安(1959-), 男, 江西人, 南方冶金学院教授

$\to M_{p,q}$, 即有交换图1

$$\begin{tikzcd} \overline{M}_{2p+1,2q+1} \arrow[r, dash, "\overline{i}"] \arrow[d, "\pi"'] & S^{2n+1} \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ M_{p,q} \arrow[r, dash, "i"] & CP^n \end{tikzcd}$$

图1

其中 i 和 $\overline{i}$ 都是等距浸入

现考虑实 $(2n-1)$ 维黎曼流形 M 到 CP^n 的等距浸入 $i: M \to CP^n$, 有交换图2

$$\begin{tikzcd} \overline{M} \arrow[r, dash, "\overline{i}"] \arrow[d, "\pi"'] & S^{2n+1} \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ M \arrow[r, dash, "i"] & CP^n \end{tikzcd}$$

图2

其中 $\overline{i}: M \to S^{2n+1}$ 是实 $2n$ 维黎曼流形 M 到 S^{2n+1} 的等距浸入, π 是与 $\overline{\pi}$ 相容的 Riemann Submersion.

设 J 是 CP^n 的复结构, N 是 M 的单位法向量场, 对于 M 的任意切向量场 X, 可记

$$JX = FX + u(X)N, JN = -U, \tag{2.1}$$

其中 FX 是 JX 切于 M 的分量, u 是 M 的1-形式, U 是 M 的单位切向量场 由此,

$$u(x) = \langle x, U\rangle, \langle FX, Y\rangle + \langle X, FY\rangle = 0, \tag{2.2}$$

其中, $\langle,\rangle$ 表示 M 的黎曼内积 设 A 是 M 的第二基本形式, 它的迹 $H = \mathrm{trace}A/(2n-1)$ 称为平均曲率 根据[7]的一个定理, CP^n 中不存在全脐点实超曲面 因此

$$S > 0, S > (2n-1)H^2. \tag{2.3}$$

CP^n 的曲率张量

$$K(X', Y')Z' = \langle Y', Z'\rangle X' - \langle X', Z'\rangle Y' + \langle JY', Z'\rangle JX' - \langle JX', Z'\rangle JY' - 2\langle JX', Y'\rangle JZ', \tag{2.4}$$

其中 X', Y', Z' 都是 CP^n 的切向量场 由 M 的 Gauss 方程, M 的曲率张量和 Ricci 曲率张量分别为

$$R(X,Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y + \langle FY, Z\rangle FX - \langle FX, Z\rangle FY - 2\langle FX, Y\rangle FZ + \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = 2(n-1) + 3\langle FX, FY\rangle + (2n-1)H\langle AX, Y\rangle - \langle A^2X, Y\rangle, \tag{2.6}$$

其中 X, Y, Z 是 M 的切向量场

设 $\{e_i\}$ 是 M 的局部标准正交基, $\{\omega^i\}$ 是其对偶基, 则对 M 上的任意光滑函数 f, 可令

$$df = \sum f_i\omega_i, \sum f_{ij}\omega_j = df_i - \sum f_j\omega_{ji},$$

$$\sum f_{ijk}\omega_k = df_{ij} - \sum f_{kj}\omega_{ki} - \sum f_{ik}\omega_{kj},$$

其中指标的取值范围: $i, j, k = 1, 2, \cdots\cdots, 2n-1$, 且约定 $\sum$ 号下重复指标表示求和 直接计算, 易知

$$f_{ij} = f_{ji}, f_{ijk} - f_{ikj} = \sum f_m R_{mijk}, \tag{2.7}$$

其中R_{mijk}是M的曲率张量R的分量.

设M的第二基本形式A的分量为h_{ij}, 则A的长度平方$S=\sum h_{ij}^2$. 由[2]及(2.4), 直接计算得

引理1 M是CP^n中的实2-调和超曲面的充要条件是

$$\sum h_{ij}H_j=-\frac{2n-1}{2}HH_i,\quad(\forall i)\tag{2.8}$$

$$\triangle H=[S-2(n+1)]H,\tag{2.9}$$

其中△是关于M上度量的Laplacian. 若$H=0$, 则M是实极小超曲面.

另外, 有如下熟知的结果.

引理2[3] 设M是CP^n的实超曲面, 则$|\nabla A|^2\geq4(n-1)$, 式中等号当且仅当$M=M_{p,q}$时成立.

引理3[5] 设M是CP^n的实超曲面, 则

$$\mathrm{div}(\nabla_u U)=2(n-1)+(2n-1)Hu(AU)-S+\frac{1}{2}|[F,A]|^2,$$

其中[,]表示交换算子.

引理4[3] 设M是CP^n的紧致实极小超曲面, 若M的第二基本形式模长平方$S\leq2(n-1)$, 则$S=2(n-1)$, 且$M=M_{p,q}$.

3 定理及其证明

首先, 研究CP^n中实2-调和超曲面和实极小超曲面的关系, 得到

定理1 设M是CP^n中的紧致实2-调和超曲面, 若M的第二基本形式长度的平方S满足$\frac{3}{8}(2n+7)<S\leq2(n+1)$, 则$M$是极小的, 或$S=2(n+1)$, 且$H$为常数.

证明 在CP^n上选取正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}=Je_1,e_{n+2}=Je_2,\cdots\cdots,e_{2n}=Je_n$, 使得限制在$M$上, 有$N=e_{2n}$, 由(2.1), (2.6), (2.7)及引理1, 直接计算得:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle(|\nabla H|^2)&=\frac{1}{2}\triangle(\sum H_i^2)=\sum H_{ij}^2+\sum H_iH_{ikk}\\&=\sum H_{ij}^2+\sum H_iH_{kki}+\sum H_iH_mR_{mkik}\\&=\sum H_{ij}^2+[S-\frac{3}{4}(2n-1)^2H^2-1]|\nabla H|^2-3H_n^2+H\sum H_iS_i\\&\geq\sum H_{ij}^2+[S-\frac{3}{4}(2n-1)^2H^2-4]|\nabla H|^2+H\sum H_iS_i.\end{aligned}\tag{3.1}$$

根据(2.10)易知

$$\frac{1}{2}\triangle H^2=|\nabla H|^2+[S-2(n+1)]H^2,\tag{3.2}$$

$$\frac{1}{4}\triangle H^4=3H^2|\nabla H|^2+[S-2(n+1)]H^4,\tag{3.3}$$

此外, 有

$$H\sum H_{i}S_{i}=\frac{1}{2}\sum(S(H^{2})_{i})_{i}-\frac{1}{2}S\triangle H^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{div}W-S|\nabla H|^{2}+[2(n+1)-S]SH^{2},\tag{3.4}$$

其中W 为M 上以$S(H^{2})_{i}$ 为分量的向量场.

由Holder 不等式知

$$\sum H_{ij}^{2}\geq\sum H_{ii}^{2}\geq\frac{1}{2n-1}(\sum H_{ii})^{2}=\frac{1}{2n-1}[2(n+1)-S]^{2}H^{2}.\tag{3.5}$$

将(3.2)-(3.5)式代入(3.1)式得

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla H|^{2}+\frac{(2n-1)^{2}}{8}H^{4}+H^{2})-\frac{1}{2}\mathrm{div}W$$

$$\geq[2(n+1)-S][\frac{2(n-1)}{2n-1}S-\frac{(2n-1)^{2}}{4}H^{2}-\frac{6(n-1)}{2n-1}]H^{2}.\tag{3.6}$$

下面估计(3.6)式的右端.

若$|\nabla H|\neq 0$, 适当选取标架场, 使$H_{1}=|\nabla H|, H_{i}=0(i\geq 2)$, 则由(2.8)式知

$$h_{11}=-\frac{2n-1}{2}H,\ \sum_{i\neq 1}h_{ii}=\frac{3(2n-1)}{2}H,$$

故

$$S\geq\sum h_{ii}^{2}\geq h_{11}^{2}+\frac{1}{2(n-1)}(\sum_{i\neq 1}h_{ii})^{2}=\frac{2n+7}{2(n-1)}\frac{(2n-1)^{2}}{4}H^{2}.\tag{3.7}$$

若$|\nabla H|=0$, 由(2.8)式关于K 求共变导数得

$$\sum h_{ij}H_{jk}=-\frac{2n-1}{2}HH_{ik},\ \forall i,k.$$

适当选取标架场, 使$h_{ij}=\lambda_{i}\delta_{ij}$, 则

$$(\lambda_{i}+\frac{2n-1}{2}H)H_{ik}=0.\tag{3.8}$$

由(2.3)式, 只需分两种情况讨论:

1) 若对$\forall i$, 均有$\lambda_{i}\neq\frac{2n-1}{2}H$, 则由(3.8)式知$H_{ik}=0, \forall i, k$, 从而

$$[S-2(n+1)]H=\triangle H=0;\tag{3.9}$$

2) 若有m 个主曲率等于$-\frac{2n-1}{2}H$ $(1\leq m\leq 2n-1)$, 不防设$\lambda_{1}=\cdots=\lambda_{m}=-\frac{2n-1}{2}H$, 则有$\sum_{i\geq m+1}\lambda_{i}=\frac{m+2}{2}(2n-1)H$, 故

$$S=\sum\lambda_{i}^{2}\geq\frac{(2n-1)m+4m+4}{2n-1-m}\frac{(2n-1)^{2}}{4}H^{2}\geq\frac{2n+7}{2(n-1)}\frac{(2n-1)^{2}}{4}H^{2}.$$

这与(3.7)式相同.

综合1), 2)及(3.7)式, 代入(3.6)式得

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla H|^{2}+\frac{(2n-1)^{2}}{8}H^{4}+H^{2})-\frac{1}{2}\mathrm{div}W$$

$$\geq[2(n+1)-S][\frac{16(n-1)}{(2n-1)(2n+7)}S-\frac{6(n-1)}{2n-1}]H^{2}.\tag{3.10}$$

故当$\frac{3}{8}(2n+7)<S\leq 2(n+1)$时,(3.10)式右端非负,两边在$M$上积分,由Stokes定理得

$$[2(n+1)-S]H=0, \tag{3.11}$$

从而$H=0$,或$S=2(n+1)$,当$S=2(n+1)$时,由(2.9)知$\triangle H=0$,即H为常数.证毕.

定理2 设M是CP^n的紧致实2-调和超曲面,

1) 若$n>3$,$\frac{3}{8}(2n+7)<S\leq 2(n-1)$,则$M$是极小的,或$S=2(n-1)$,且$M=M_{p,q}$;

2) 若$n>3$,$2(n-1)<S\leq 2(n+1)$,则M极小,或$S=2(n+1)$且具常中曲率;

3) 若$S>2(n+1)$,则M极小.

证明 根据引理4及定理1可推得(1),(2)成立;由(3.2)式可推知(3)成立.

注 定理2是文[3]结果(本文引理4)的推广.

设K是M的截面曲率的下确界,有

定理3 设M是CP^n的紧致实2-调和超曲面,若M的截面曲率的下确界满足

$$K\geq\frac{2(n-1)-[S-2(n+1)](2n-1)^2H^2}{(2n-1)[S-(2n-1)H^2]}, \tag{3.12}$$

则$M=M_{p,q}$.

证明 类似[5]的计算,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S=&(2n-1)\sum h_{ij}H_{ij}+|\nabla A|^2+\sum\langle[R(e_i,e_j),A]e_i,Ae_j\rangle+\\&\frac{3}{2}|[A,F]|^2-3S+3(2n-1)Hu(AU)\\\geq&(2n-1)\sum h_{ij}H_{ij}+|\nabla A|^2+(2n-1)K[S-(2n-1)H^2]+\\&\frac{3}{2}|[A,F]|^2-3S+3(2n-1)Hu(AU).\end{aligned} \tag{3.13}$$

对(2.8)式两端关于i求共变导数,并对i作和可得

$$\sum h_{ij}H_{ij}=-(2n-1)|\nabla H|^2-\frac{2n-1}{4}\triangle H^2.$$

将上式代入(3.13),并利用(3,2)式,有

$$\begin{aligned}\triangle[\frac{1}{2}S+\frac{3(2n-1)^2}{4}H^2]\geq&|\nabla A|^2+[S-2(n+1)](2n-1)^2H^2+\\&(2n-1)K[S-(2n-1)H^2)]+\frac{3}{2}|[A,F]|^2-3S+3(2n-1)Hu(AU)\end{aligned} \tag{3.14}$$

由引理3,有

$$\begin{aligned}\triangle[\frac{1}{2}S+\frac{3(2n-1)^2}{4}H^2]-3\mathrm{div}(\nabla_UU)\geq&[|\nabla A|^2-4(n-1)]+\\&\{(2n-1)K[S-(2n-1)H^2)]+[S-2(n+1)](2n-1)^2H^2-2(n-1)\}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

上式两边在M上积分,由Stokes定理,有

$$\begin{aligned}0\geq&\int[|\nabla A|^2-4(n-1)]^*1+\int\{(2n-1)K[S-(2n-1)H^2]+\\&[S-2(n+1)](2n-1)^2H^2-2(n-1)\}^*1.\end{aligned} \tag{3.16}$$

当定理3条件满足时,(3.16)右端两项均为0.由引理2,知$M=M_{p,q}$.证毕.

根据定理1,定理2,定理3,有

推论 设M为CP^n的紧致实2-调和超曲面, 当$S>\frac{3}{8}(2n+7)$, $S\neq 2(n+1)$, $K\geq\frac{2(n-1)}{(2n-1)S}$时, $M=M_{p,q}$

证明 由定理1和定理2的(3), 当$S>\frac{3}{8}(2n+7)$, $S\neq 2n+1$时, $H=0$. 由定理3, 当$K\geq\frac{2(n-1)}{(2n-1)S}$时, $M=M_{p,q}$

注 Kon M. 在文[4]中证得: 当$H=0$, $K\geq\frac{1}{2n-1}$时, $M=M_{p,q}$. 这里, 只要$S\geq 2(n-1)$, 便有$\frac{2(n-1)}{(2n-1)S}\leq\frac{1}{2n-1}$, 在这个意义下, 推广了Kon M. 的结果

参 考 文 献

[1] 姜国英. 2-调和映照及其第一、二变分 [J]. 数学年刊, 1986, **7A**(4): 389-402.

[2] 姜国英. Riemann 流形间2-调和的等距浸入 [J]. 数学年刊, 1986, **7A**(2): 130-144.

[3] Lawson H B. *Local rigiding theorems in rank-1 symmetric spaces* [J]. J. Diff. Geom., 1970, **4**: 349-357.

[4] Kon M. *Real minimal hypersurfaces in a complex projective spaces* [J]. Proc. A. M. S., 1980, **79**: 285-288.

[5] Okumura M. *Compact real hypersurfaces with constant mean curvature of a complex projective space* [J]. J. Diff. Geom., 1978, **13**: 43-50.

[6] 陈建华. 球面$S^{n+1}(1)$中的紧致2-调和超曲面 [J]. 数学学报, 1993, **36**(3): 341-347.

[7] Tashiro Y and Tachibana S. *On Fubinian and c-Fubinian manifolds* [J]. Kiodai Math. Sem. Rep., 1963, **15**: 176-183.

Real 2-Harmonic Hypersurfaces in a Complex Projective Space

Sun Hongan

(Southern Institute of Metallurgy, Ganzhou 341000)

Zhong Dingxing

(Gannan Teachers' College, Ganzhou 341000)

Abstract

we study the relation between the real 2-harmonic hypersurfaces and the real minimal hypersurfaces in a complex projective space. Lanson H B.'s and Kon M.'s pinching theorem of the real minimal hypersurface are generlized.

Keywords real 2-hamonic hypersurface, complex projective space, Pinching