关于映射芽在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{K}$ 的一些子群下的有限决定性*

熊 剑 飞
(青岛大学应用数学研究所, 266071)

摘 要: 本文利用乘积积分理论给出了映射芽在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{K}$ 的一些子群下有限决定的充分必要条件.

关键词: 映射芽, 有限决定性, $\mathcal{A}$ 子群, $\mathcal{K}$ 子群.
分类号: AMS(1991) 58C27/CLC O186.33
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0437-08

1 引 论

在[2]中Mather研究了映射芽 f 关于作用群 $\mathcal{S}=\mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}$ 为有限决定的充分必要条件, 其中 $\mathcal{R}$ 是右作用群. 记 C_n 为 n 元可微函数芽组成的环, $C_n=\{u:(R^n:0)\to R\mid u$ 是可微函数芽$\}$. m_n 为 C_n 的极大理想. 已知, 两个映射芽 $f, g\in C_n$ 说是 $\mathcal{R}$-等价的 $(f\sim_{\mathcal{R}} g)$, 当且仅当存在一微分同胚芽 $h\in\mathcal{R}$ 使得 $f\circ h=g$. 记 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)'$, 因为 $h(0)=0$, 所以 $h_i(0)=0$, $i=1,\cdots,n$. 因此有 $h_i(x)=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}(x)x_j$, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in R^n$, 且 $u_{ij}(x)\in C_n=\{u:(R^n,0)\to(R^n,0)\mid u$ 是 C^∞ 的函数芽, 因此有 $h(x)=H[x]*x$, 其中 $H[x]=(u_{ij}(x))_{n\times n}$. 因为 h 在 $x=0$ 处的Jacobian矩阵 $J(h)\mid_{x=0}=H[0]$ 且 h 是可逆的, 所以 $H[0]$ 是非奇异的. 这样知道, 对于函数 $f, g\in C_n$, $f\sim_{\mathcal{R}} g$ (f $\mathcal{R}$-等价于 g.) 等价于: 存在一个矩阵芽 $H[x]\in C_n^{n\times n}$, 其中 $H[0]$ 非奇异且 $f(H[x]\cdot x)=g(x)$. 下面利用这种矩阵表述的方法来重新定义 $\mathcal{R}, \mathcal{C}$, 并给出 $\mathcal{R}, \mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathcal{C}$ 等的一些子群, 研究映射芽在这些子群下的有限决定性问题并给出在这些子群下 f 为有限决定的充分必要条件.

2 定 义

定义作用群 $\mathcal{R}=\{A:(R^n,0)\to GL(R,n)\mid A$ 是光滑的映射芽$\}$, $\mathcal{C}=\{A:(R^n,0)\to GL(R,p)\mid A$ 是光滑的映射芽$\}$, $\mathcal{L}=\{h:(R^p,0)\to(R^p,0)\mid h$ 是局部光滑同胚$\}$(同[2]中的定义一样).

* 收稿日期: 1995-07-15
作者简介: 熊剑飞(1963-), 男, 贵州贵阳人, 博士, 现为青岛大学副教授.

下面定义 $\mathbf{R}$ 的一些子群. 对于任意矩阵 $N\in R^{n\times n}$, 定义 $\mathbf{R}$ 的子群 $\mathbf{R}_N=\{A\in\mathbf{R}\mid A[x]\cdot N\cdot(A[x])^T=N, x\in(R^n,0)\}$, $\mathbf{R}_N$ 的子群 $\mathbf{R}_{SN}=\{A\in\mathbf{R}\mid \det A[x]=1, x\in(R^n,0)\}$. 记 $\mathbf{R}_N$ 的元素在 x 处的值组成的集合为 $\mathbf{R}_N[x]=\{A[x]\mid A\in\mathbf{R}_N\}$, 类似地有 $\mathbf{R}_{SN}=\{A[x]\mid A\in\mathbf{R}_{SN}\}$, 则当 $N=I_n,\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & -I_r\end{pmatrix}, 0$ 时 $\mathbf{R}_N$ 分别是实正交群, Lorentz 群和 $\mathbf{R}[x]$ 本身, 而 $\mathbf{R}_{SN}[x]$ 是特殊实正交群. 类似地, 对于任意给定的矩阵 $P\in R^{p\times p}$ 定义 $\mathbf{C}$ 的子群

$$\mathbf{C}_P=\{B\in\mathbf{C}\mid B[x]\cdot P\cdot(B[x])^T=P, x\in(R^n,0)\},$$
$$\mathbf{C}_{SP}=\{B\in\mathbf{C}_P\mid \det B[x]=1, x\in(R^n,0)\}.$$

特别地, 当 $n=2mp$, $p=2q$ 且 $N=\begin{pmatrix}0 & I_m\\ -I_m & 0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0 & I_q\\ -I_q & 0\end{pmatrix}$ 时,

$$\mathbf{R}_N[x]=Sp(2m,R),\quad \mathbf{C}_P[x]=Sp(2q,R)$$

是实辛群.

所有光滑映射芽 $f:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 作成的环记为 $m_nC_n=\underbrace{m_nC_n\times\cdots\times C_n}_{p}$. 对于 $f\in m_nC_n^p$, 用 $V(f)$ 表示所有沿着 f 的光滑向量场组成的 C_n-模, 这个模通过它的自由基 $\{\frac{\partial}{\partial y_1}\circ f,\cdots,\frac{\partial}{\partial y_p}\circ f\}$ 可以等同于 C_n^p. 特别地, 当 f 取为 $(R^n,0)$ 和 $(R^p,0)$ 到自身的恒等映射芽时, $V(f)$ 分别就是 C_n-模 $V(R^n)$ 和 C_p-模 $V(R^p)$, 这时还可以定义 $tf:V(R^n)\to V(f)$, 和 $\omega f:V(R^p)\to V(f)$ 为 $tf(\xi)=Tf\circ\xi$, $\xi\in V(R^n)$, $\omega f(\eta)=\eta\circ f$, $\eta\in V(R^n)$ ($V(R^n)$ 的定义见[2]).

那么这里新定义的 $\mathbf{R}$ 以及其它群是怎样作用于 $m_nC_n^p$ 的呢? 这里以 $\mathbf{R}_N$ 和 $\mathbf{C}_P$ 为例来叙述 $\mathbf{R}_N$ 和 $\mathbf{C}_P$ 对 $m_nC_n^p$ 的作用. 对于映射芽 $f,g\in m_nC_n^p$, 说 f 和 g 在相同的 $\mathbf{R}_N$-轨道中, 当且仅当存在 $A\in\mathbf{R}_N$ 使得 $f(A[x]\cdot x)=g(x)$ (记为 $f\circ A=g$)). f 和 g 在同一 $\mathbf{C}_P$-轨道中当且仅当存在 $B\in\mathbf{C}_P$ 使得 $B[x]\cdot f(x)=g(x)$ (简记为 $B\cdot f=g$. "·"是矩阵乘积).

如果说 f $\mathbf{R}_N$-等价于 g 当且仅当 f 与 g 在同一 $\mathbf{R}_N$-轨道中, 可以验证这确实定义了一个等价关系, 这里省略. 在 $\mathbf{R}_{SN}$, $\mathbf{C}_P$, $\mathbf{C}_{SP}$ 的情形验证也是类似的.

下面进一步来定义 $\mathbf{R}_N$ 与 $\mathbf{C}_P$ 对 $m_nC_n^p$ 的作用. 如果说 f 是 $\mathbf{C}_P\times\mathbf{R}_N$-等价于 g, 当且仅当存在 $A\in\mathbf{R}_N$, $B\in\mathbf{C}_P$ 使得 $f=B\cdot g\circ A^{-1}$, f 是 $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_N$-等价于 g 当且仅当存在 $h\in\mathbf{L}$, $A\in\mathbf{R}_N$ 使得 $f=h\circ g\circ A^{-1}$. 同样地对于 $\mathbf{S}=\mathbf{R}_{SN}$, $\mathbf{C}_{SP}$, $\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN}$, $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$ 也可以类似定义 f 关于 $\mathbf{S}$ 与 g 的等价性.

在这一节的最后, 再给出 $V(R^n)$ 和 $V(R^p)$ 的一些子模的定义:

$$V_N(R^n)=\{A[x]\cdot x\mid A[x]\in C_n^{n\times n}, A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0, x\in(R^n,0)\},$$
$$V_{SN}(R^n)=\{A[x]\cdot x\mid A[x]\in C_n^{n\times n}, A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0, \operatorname{tr}A[x]=0, x\in(R^n,0)\},$$
$$V_P(R^P)=\{B[x]\cdot y\mid B[x]\in C_n^{p\times p}, B[x]\cdot P+P\cdot(B[x])^T=0, x\in(R^n,0)\},$$
$$V_{SP}(R^P)=\{B[x]\cdot y\mid B[x]\in C_n^{p\times p}, B[x]\cdot P+P\cdot(B[x])^T=0, \operatorname{tr}B[x]=0, x\in(R^n,0)\},$$

这里若 $N=0$, 则 $V_N(R^n)=m_nV(R^n)$.

3 主要定理

定理3.1 如果 $\mathbf{S}$ 是作用群 $\mathbf{R}_N$, $\mathbf{R}_{SN}$, $\mathbf{C}_P$, $\mathbf{C}_{SP}$, $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_N$, $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$, $\mathbf{C}_P\times\mathbf{R}_N$, $\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN}$ 中的任何一个, 则映射芽 $f\in m_nC_n^p$ 关于 $\mathbf{S}$ 有限决定的充要条件为 $d(f,\mathbf{S})<\infty$, 其中,

$$d(f,\mathbf{R}_N)=\dim_R V(f)/tf(V_N(R^n)),\ d(f,\mathbf{R}_{SN})=\dim_R V(f)/tf(V_{SN}(R^n)),$$

$$d(f,\mathbf{C}_P)=\dim_R V(f)/\omega f(V_P(R^p)),\ d(f,\mathbf{C}_{SP})=\dim_R V(f)/\omega f(V_{SP}(R^p)),$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$d(f,\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN})=\dim_R V(f)/(\omega f(m_pV(R^p))+tf(V_{SN}(R^n)),$$

$$d(f,\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN})=\dim_R V(f)/(\omega f(m_pV_{SP}(R^p))+tf(V_{SN}(R^n)).$$

现将只在 $\mathbf{S}=\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$, $\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN}$, 的情形证明此定理, 其它情形的证明是类似的

4 $\mathbf{S}=\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN}$ 时定理(3.1)充分性的证明

给定 $f\in m_nC_n^p$ 且 $d(f,\mathbf{S})<\infty$, 假如 $g\in m_nC_n^p$ 与 f 在0处有相同 l-jet(l 在后面给出), 需要证明 f 与 g 在同一个 $\mathbf{S}$-轨道里

设 $A_t:(R^n,0)\to GL(R,n)$ 是 $\mathbf{R}_{SN}$ 中一族映射芽, $B_t:(R^n,0)\to GL(R,p)$ 是 $\mathbf{C}_{SP}$ 中一族映射芽, $t\in(R,t_0)$. 记 $f_t=f+t\cdot h$, 其中 $h=g-f\in m_n^{l+1}C_n^p$. 那么 $\frac{\partial f_t}{\partial t}\in m_n^{l+1}C_n^p=m_n^{l+1}V(f)$.

在另一方面

$$\begin{aligned}\frac{\partial(B_t^{-1}\cdot f_t\circ A_t)}{\partial t}&=\frac{\partial B_t^{-1}}{\partial t}\cdot f_t\circ A_t+B_t^{-1}\cdot\frac{\partial(f_t\circ A_t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial B_t^{-1}}{\partial t}\cdot f_t\circ A_t+B_t^{-1}\cdot\frac{\partial f_t}{\partial t}\circ A_t+B_t^{-1}\cdot Tf_t\circ\frac{\partial A_t}{\partial t}\\&=B_t^{-1}\cdot\left(B_t\cdot\frac{\partial B_t^{-1}}{\partial t}\cdot f_t+\frac{\partial f_t}{\partial t}+Tf_t\circ\frac{\partial A_t}{\partial t}\circ A_t^{-1}\right)\circ A_t\\&=B_t^{-1}\left(-\frac{\partial B_t}{\partial t}\cdot B_t^{-1}\cdot f_t+\frac{\partial f_t}{\partial t}+Tf_t\circ\frac{\partial A_t}{\partial t}\circ A_t^{-1}\right)\circ A_t.\end{aligned}$$

记 $\Delta=\frac{V(f)}{\omega f(V_{SP}(R^p))+tf(V_{SN}(R^n))}$. 因为 $\omega f(V_{SP}(R^p))$ 和 $tf(V_{SN}(R^n))$ 都是 C_n-模, 考虑到 $d=d(f,\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN})=\dim_R\Delta<\infty$, 由Nakayama 引理, 得到

$$0\subsetneq m_n^i\Delta\subsetneq m_n^{i-1}\Delta\subsetneq\cdots\subsetneq m_n\Delta\subsetneq\Delta,\quad i\leq d.$$

因此 $m_n^dV(f)\subset tf(V_{SN}(R^n))+\omega f(V_{SP}(R^p))$, 再由逼近引理(见[3], 引理1.3A), 有

$$m_n^dV(f)\subset tf_t(V_{SN}(R^n))+\omega f_t(V_{SP}(R^p))+m_n^{l+1}V(f),$$

记 $l=d+r+1$, 由Nakayama 引理得到

$$m_n^dV(f)\subset tf_t(V_{SN}(R^n))+\omega f_t(V_{SP}(R^p)).$$

进一步地

$$m_n^{d+r+1}V(f)\subset tf_t(m_n^{r+1}V_{SN}(R^n))+\omega f_t(m_n^{r+1}V_{SP}(R^p)),$$

从而存在 $\xi\in m_n^{r+1}V_{SN}(R^n)$ 和 $\eta\in m_n^{r+1}V_{SP}(R^p)$ 使得

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=tf_t(\xi)+\omega f_t(\eta).\qquad(4.1)$$

令 $\xi = A[x]\cdot x$, $\eta = B[x]\cdot y$, 其中

$$A[x]\in m_n^{r+1}C_n^{n\times n},\ A[x]\cdot N + N\cdot(A[x])' = 0,\ \mathrm{tr}A[x]=0,\ x\in(R^n,0);$$

$$B[x]\in m_n^{r+1}C_n^{p\times p},\ B[x]\cdot P + P\cdot(B[x])' = 0,\ \mathrm{tr}B[x]=0,\ x\in(R^n,0).$$

记 $\bar{A}$ 是 $-\xi$ 的具有初始条件 $\bar{A}_{t_0}(x)=x$ 的积分, $\bar{B}$ 是 η 的具有初始条件 $\bar{B}_{t_0}(x)=x$ 的积分, 那么 $\frac{\partial \bar{A}_t}{\partial t}\circ \bar{A}_t^{-1}(x) = A[x]\cdot x$, 从而有 $\frac{\partial \bar{A}_t(x)}{\partial t} = A[\bar{A}_t(x)]\cdot\bar{A}_t(x)$.

由于 $A[x]\in m_n^{r+1}C_n^{n\times n}$, 所以这个微分方程的解存在且唯一, 可将此解记为 $h_t(x)$. 因此 $\frac{\partial\bar{A}_t(x)}{\partial t}=A[h_t(x)]\cdot\bar{A}_t(x)$.

利用乘积积分的知识[1], 得到

$$\bar{A}_t(x)=\prod_{t_0}^{t} e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}\cdot \bar{A}_{t_0}(x)=\prod_{t_0}^{t} e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}\cdot x=\lim_{\mu\to 0}\prod_{k=1}^{n} e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k}\cdot x,$$

这里 μ 是区间 $[t_0, t]$ 划分 $t_0\le t_1\le\cdots\le t_k\le\cdots\le t_n$ 中子区间长度的最大值, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

因此 $\bar{A}_t$ 可以以矩阵形式表示为: $\bar{A}_t(x)=\bar{A}_t[x]\cdot x$, $\bar{A}_t[x]=\prod_{t_0}^{t} e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}$. 由于

$$A[h_t(x)]\cdot N + N\cdot(A[h_t(x)])'=0,$$

且 $e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}((A[h_{t_k}(x)])\cdot\Delta t_k)^n$, 有

$$e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k}\cdot N = N\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}((-A[h_{t_k}(x)])'\cdot\Delta t_k)^n,$$

因此

$$\prod_{t_0}^{t} e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}\cdot N = N\cdot\prod_{t_0}^{t} e^{-(A[h_s(x)])'\mathrm{d}s}.$$

另一方面, 由 $\bar{A}_t[x]=\prod_{t_0}^{t} e^{A[h_s(x)]ds}$, 今有

$$\frac{\partial\bar{A}_t[x]}{\partial t}=A[h_t(x)]\cdot\bar{A}[x]\text{(见[1])}\Rightarrow\frac{\partial\bar{A}_t[x]}{\partial t}\cdot\bar{A}_t^{-1}[x]=A[h_t(x)]$$

$$\Rightarrow \bar{A}_t[x]\cdot\frac{\partial\bar{A}_t^{-1}[x]}{\partial t}=-A[h_t(x)]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial(\bar{A}_t^{-1}[x])'}{\partial t}\cdot(\bar{A}_t[x])'=-(A[h_t(x)])',$$

因此

$$(\bar{A}_t^{-1}[x])'=\prod_{t_0}^{t} e^{-(A[h_s(x)])'\mathrm{d}s}\cdot(\bar{A}_t^{-1}[x])'=\prod_{t_0}^{t} e^{-(A[h_s(x)])'\mathrm{d}s}\Rightarrow$$

$$\bar{A}_t[x]\cdot N = N\cdot(\bar{A}_t^{-1}[x])',$$

即 $\bar{A}_t[x]\cdot N\cdot(\bar{A}_t[x])'=N$. 所以 $\bar{A}_t\in\mathbf{R}_N$. 进一步地

$$\det\bar{A}_t[x]=\det(\prod_{t_0}^{t} e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s})=e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}(A[h_s(x)])\mathrm{d}s}\text{(见[1])}=e^0=1\ (\mathrm{tr}A=0).$$

因此 $\bar{A}_t\in\mathbf{R}_{SN}$. 另一方面, 由于 $A[x]\in m_n^{r+1}C_n^{n\times n}$, $\bar{A}_t(0)=0$, 有

$$A[\bar{A}_t(x)]\cdot\bar{A}_t[x]\cdot x\in m_n^{r+2}V(R^n).$$

又由微分方程$\frac{\partial \bar{A}_t}{\partial t}\circ \bar{A}_t^{-1}(x)=A[x]\cdot x$，即$\bar{A}_t(x)-x=\int_0^t A[\bar{A}_t(x)\cdot \bar{A}_t(x)]\cdot x\,dt$，从而有$(\bar{A}_t)_r=(\mathrm{id})_r$。同样地，由$\bar{B}$是$\eta=B[x]\cdot y$的具有初始条件$\bar{B}_{t_0}(y)=y$的积分，即

$$\frac{\partial \bar{B}_t}{\partial t}\cdot \bar{B}_{t_0}^{-1}\cdot y=B[x]\cdot y,$$

其中$B[x]\cdot P+P\cdot(B[x])'=0$，且$\mathrm{tr}B[x]=0$，有

$$\bar{B}_t\in \mathbf{C}_{SP},\bar{B}_t[x]\cdot y-y=\int_0^t B[x]\cdot \bar{B}_t[x]\cdot y\,dt$$

且$B[x]\cdot\bar{B}_t[x]\cdot y\in m_n^{r+1}V(R^p)$，因此$(\bar{B}_t)_r=(\mathrm{id})_r$。由(4.1)，得到

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}+tf_t\left(\frac{\partial \bar{A}_t}{\partial t}\circ \bar{A}_t^{-1}\right)-\omega f_t\left(\frac{\partial \bar{B}_t}{\partial t}\cdot \bar{B}_t^{-1}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial(\bar{B}_t^{-1}\cdot f_t\circ \bar{A}_t)}{\partial t}=0.$$

从而对某个$t_0\in R$，当$|t-t_0|$小时有$\bar{B}_t^{-1}\cdot f_t\circ \bar{A}_t=f_{t_0}$，再由$[0,1]$的紧性，有$\bar{B}_1^{-1}\cdot f_1\circ \bar{A}_1=f_0$，即$\bar{B}_1^{-1}\cdot g_1\circ \bar{A}_1=f_0$，这就证明了$f$ $\mathbf{C}_{SP}\times\mathbf{R}_{SN}$-等价于$g$.

5　$\mathbf{S}=\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$时定理(3.1)的充分性的证明

对于$f\in m_nC_n^p$，有

$$\dim_R\frac{V(f)}{\omega f(m_p^{r+1}V(R^p))+tf(m_n^rV_{SN}(R^n))}\ (\stackrel{\triangle}{=}d')$$

$$\leq d(f,\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN})+\dim_R\frac{V_{SN}(R^n)}{m_n^rV_{SN}(R^n)}+\dim_R\frac{V(R^p)}{m_n^{r+1}V_{SN}(R^p)}\ \text{(参见[2],(6.1))}.$$

考虑自然投影$\alpha V_{SN}(R^n)\to\frac{m_nV(R^n)}{m_n^{r+1}V_{SN}(R^n)}$，$(V_{SN}(R^n)\subset m_nV(R^n))$，有

$$V_{SN}(R^n)/V_{SN}(R^n)\cap m_n^{r+1}V(R^n)\cong\alpha(V_{SN}(R^n)\subset m_nV(R^n)/m_n^{r+1}V(R^n).$$

因为$V_{SN}(R^n)\cap m_n^{r+1}V(R^n)=m_n^rV_{SN}(R^n)$，所以

$$V_{SN}(R^n)/m_n^rV_{SN}(R^n)\cong\alpha(V_{SN}(R^n)),$$

从而有

$$\dim_R\frac{V(f)}{\omega f(m_p^{r+1}V(R^p))+tf(m_n^rV_{SN}(R^n))}$$

$$\leq d(f,\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN})+\dim_R\frac{m_nV(R^n)}{m_n^{r+1}V(R^n)}+\dim_R\frac{V(R^p)}{m_p^{r+1}V(R^p)}<\infty.$$

置

$$d_i=\dim_R\frac{V(f)}{\omega f(m_p^{r+1}V(R^p))+tf(m_n^rV_{SN}(R^n))+m_n^iV(f)},$$

则$d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_i\leq\cdots\leq d'$.

设k是使$d_k=d_{k+1}=\cdots$的最小正整数，那么对所有的$q>k$有

$$\omega f(m_p^{r+1}V(R^p))+tf(m_n^rV_{SN}(R^n))+m_n^qV(f)\supseteq m_n^kV(f).$$

应用[2]中的定理(1.13)(见[2](1.12))到混合同态$(\omega f,tf,m_p^{r+1}V(R^p),m_n^rV_{SN}(R^n),m_n^kV(f))$，得

$$tf\left(m_n^r V_{SN}(R^n)\right)+\omega f\left(m^{r+1}V(R^p)\right)\supseteq m_n^r V(f).$$

由逼近引理,得到

$$m_n^k V(f)\subseteq tf_t\left(m_n^r V_{SN}(R^n)\right)+\omega f_t\left(m_p^{r+1}V(R^p)\right)+m_n^l V(f).$$

置

$$\alpha=p\begin{pmatrix}p+r+2\\ r+1\end{pmatrix},\ b=p\begin{pmatrix}n+k\\ k-1\end{pmatrix},\ l=k+1+\alpha\begin{pmatrix}p+b+1\\ b\end{pmatrix}.$$

再次应用[2]中定理(1.13)到混合同态

$$\left(\omega f_t, tf_t, m_p^{r+1}V(R^p), m_n^r V_{SN}(R^n)\right),$$

可得

$$m_n^k V(f)\subseteq tf_t\left(m_n^r V_{SN}(R^n)\right)+\omega f_t\left(m_p^{r+1}V(R^p)\right).$$

因为$\frac{\partial f_t}{\partial t}\in m_n^{l+1}V(f)$,且 $l>k$,所以存在 $\xi\in m_n^r V_{SN}(R^n)$和 $\eta\in m_p^r V(R^p)$. 设$\overline{A}_t$为$-\xi$的积分,h_t为 η的积分,在另一方面

$$\frac{\partial(h_t^{-1}\circ f_t\circ \overline{A}_t)}{\partial t}=\frac{\partial h_t^{-1}}{\partial t}\circ f_t\circ \overline{A}_t+Th_t^{-1}\circ\frac{\partial f_t}{\partial t}\circ\overline{A}_t+Th_t^{-1}\cdot Tf_t\circ\frac{\partial\overline{A}_t}{\partial t}$$

$$=Th_t^{-1}\circ\left(-\frac{\partial h_t}{\partial t}\circ h_t^{-1}\circ f_t+\frac{\partial f_t}{\partial t}+Tf_t\circ\frac{\partial\overline{A}_t}{\partial t}\circ\overline{A}_t^{-1}\right)\circ\overline{A}_t.$$

如同§4中一样,可证对于 $t\in(R,t_0)$,$\overline{A}_t\in\mathbf{R}_{SN}$,$(\overline{A}_t)_r=(\mathrm{id})_r$,$h_t\in\mathbf{L}$,$h_{t_0}=\mathrm{id}$(见[2]引理(4.2)),且$(h_t)_r=(\mathrm{id})_r$,已知

$$-\frac{\partial h_t}{\partial t}\circ h_t^{-1}\circ f_t+\frac{\partial f_t}{\partial t}+Tf_t\circ\frac{\partial\overline{A}_t}{\partial t}\circ\overline{A}_t^{-1}\circ\overline{A}_1=0$$

用§4中同样的方法,有 $h^{-1}\circ f_1\circ\overline{A}_1=f_0$,即 $h^{-1}\circ g\circ\overline{A}_1=f$. 因此 f $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$-等价于 g.

6 定理(3.1)的必要性的证明

命题6.1 对于 $f\in m_nC_n^p$,置 $z=f^{(l)}$且 $U=\mathbf{S}_k^l\cdot z$($\mathbf{S}_k^l$通过 z 的轨道),$\mathbf{S}_k^l=\mathbf{S}_l/\mathbf{S}_k$. 那么 T_zU(U 在 z 处的切空间)等于

a) $\pi^l\left(\omega f\left(m_p^{k+1}V(R^p)\right)\right)$,当 $\mathbf{S}=\mathbf{L}$;(见[2],(7.4))

b) $\pi^l\left(tf\left(m_n^k V_N(R^n)\right)\right)$,当 $\mathbf{S}=\mathbf{R}_N$; b)′ $\pi^l\left(tf\left(m_n^k V_{SN}(R^n)\right)\right)$,当 $\mathbf{S}=\mathbf{R}_{SN}$;

c) $\pi^l\left(\omega f\left(m_p^k V_P(R^p)\right)\right)$,当 $\mathbf{S}=\mathbf{C}_P$; c)′ $\pi^l\left(\omega f\left(m_p^k V_{SP}(R^p)\right)\right)$,当 $\mathbf{S}=\mathbf{C}_{SP}$.

(b)′的证明 对于 $\xi\in V_{SN}(R^n)$,令

$$\xi(x)=A[x]\cdot x,\ A[x]\in C_n^{n\times n},\ A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^{\prime}=0$$

且 $\mathrm{tr}A[x]=0$,则由方程$\frac{\partial\overline{A}_t}{\partial t}\circ\overline{A}_t^{-1}(x)=A[x]\cdot x$,$\overline{A}_0(x)=x$,已知$A_t\in\mathbf{R}_{SN}$且

$$\frac{\partial\overline{A}_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0}=A[\overline{A}_t(x)]\cdot A_t(x)\Big|_{t=0}=A[x]\cdot x,$$

即$\frac{\partial\overline{A}_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\xi$ 于是

$$\pi^l\left(tf\left(\frac{\partial\overline{A}_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)\right)=\pi^l\left(\frac{\partial(\overline{A}_t,f)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)=\pi^l\left(\frac{\partial(f\circ\overline{A}_t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)=\frac{\partial(f\circ\overline{A}_t)^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

另外

$$T\alpha_z\Big(\pi^l_{\mathbf{R}_{SN}}\Big(\frac{\partial \overline{A}_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big)\Big) = T\alpha_z\Big(\frac{\partial \overline{A}_t^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big) = \frac{\partial(\overline{A}_t^{(l)}\cdot z)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial(\overline{A}_t\cdot f)^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial(f\circ \overline{A}_t)^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0}$$ ($T\alpha_z$ 的定义见[2]),

因而有下列交换图:

$$\begin{tikzcd}
V_{SN}(R^p) \arrow[r, "\omega f"] \arrow[d, "\pi^l_{\mathbf{R}_{SN}}"'] & m_nV(f) \arrow[d, "\pi^l"] \\
T_1\mathbf{R}_{SN} \arrow[r, "T\alpha_z"] & T_zJ^l
\end{tikzcd}$$

因为 π^l 是到上的且 $m_n^kV_{SN}(R^n) = (\pi^l_{\mathbf{R}_{SN}})^{-1}(T_1(\mathbf{R}_{SN})^l_k)$, 所以

$$T_zU = T_z((\mathbf{R}_{SN})^l_k\cdot z) = \pi^l(tf(m_n^kV_{SN}(R^n))).$$

c) 的证明　对于 $\eta\in\mathbf{C}_{SP}$, 让

$$\eta(y) = B[x]\cdot y, B[x]\in C_n^{p\times p}, B[x]\cdot P + P\cdot(B[x])' = 0,$$

且 $\mathrm{tr}B[x] = 0$, 那么由方程 $\frac{\partial \overline{B}_t[x]}{\partial t}\cdot\overline{B}_t^{-1}[x]\cdot y = B[x]\cdot y, \overline{B}_0[x] = I$, 已知 $\overline{B}_t\in\mathbf{C}_{SP}$, 且

$$\frac{\partial \overline{B}_t(y)}{\partial t}\Big|_{t=0} = B[x]\cdot\overline{B}_t[x]\cdot y\Big|_{t=0} = B[x]\cdot y.$$

即 $\frac{\partial \overline{B}_t(y)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta$ 所以

$$\pi^l\Big(\omega f\Big(\frac{\partial \overline{B}_t(y)}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big)\Big) = \pi^l\Big(\frac{\partial \overline{B}_t(f)}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big) = \frac{\partial(\overline{B}_t(f))^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0},$$

且

$$T\alpha_z\Big(\pi^l_{\mathbf{C}_{SP}}\Big(\frac{\partial \overline{B}_t}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big)\Big) = T\alpha_z\Big(\frac{\partial \overline{B}_t^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big)\Big) = \frac{\partial \overline{B}_t^{(l)}(z)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial(\overline{B}_t(f))^{(l)}}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

因而有下列交换图:

$$\begin{tikzcd}
V_{SP}(R^p) \arrow[r, "\omega f"] \arrow[d, "\pi^l_{\mathbf{C}_{SP}}"'] & m_nV(f) \arrow[d, "\pi^l"] \\
T_1\mathbf{C}^l_{SP} \arrow[r, "T\alpha_z"] & T_zJ^l
\end{tikzcd}$$

又因为 $m_p^kV_{SP}(R^p) = (\pi^l_{\mathbf{C}_{SP}})^{-1}(T_1(\mathbf{C}_{SP})^l_k)$, 所以

$$T_zU = T_z((\mathbf{C}_{SP})^l_k\cdot z) = \pi^l(\omega f(m_p^kV_{SP}(R^p))).$$

其它情形的证明是类似的, 在此省略 由此命题得到

$$T_z(((\mathbf{C}_{SP})^l_k\times(\mathbf{R}_{SN})^l_k).\ z) = \pi^l(\omega f(m_p^kV_{SP}(R^p) + tf(m_n^kV_{SN}(R^n)))),$$

$$T_z(((\mathbf{C}_{SP})^l_k\times(\mathbf{R}_{SN})^l_k).\ z) = \pi^l(\omega f(m_p^{k+1}V(R^p) + tf(m_n^kV_{SN}(R^n)))).$$

假设 $f\in m_nC_n^p$ 关于 $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$ 是 r-决定的 考虑整数 $l>r$, 设 $E = \pi^{-1}(\pi(z))\subset J^l$, 其中 $\pi: J^l\to J^r$ 表示投影. z 关于 $\mathbf{L}\times\mathbf{R}_{SN}$ 是 r-决定的意味着 $E\subseteq U$, 其中 U 表示 z 在 J 中在 $\mathbf{L}^l\times\mathbf{R}^l_{SN}$ 的作用下的轨道, 容易看出 $T_zE = \pi^l(m_n^{r+1}V(f))$.

因为 $T_zE \subseteq T_zU$ 且 $\ker(\pi^l) = m_n^{l+1}V(f)$, 于是

$$m_n^{r+1}V(f) \subseteq \omega f(m^{k+1}V(R^p)) + tf(m_n^k V_{SN}(R^n)) + m_n^{l+1}V(f),$$

由[2]定理(1. 13), 当 l 取得充分大时, 则上述包含关系意味着

$$\begin{aligned} m_n^{r+1}V(f) &\subseteq \omega f(m_p^{k+1}V(R^p)) + tf(m_n^k V_{SN}(R^n)) \\ &\subseteq \omega f(m_p V(R^p)) + tf(V_{SN}(R^n)) \end{aligned}$$

这样有 $d(f, \mathbf{L} \times \mathbf{R}_{SN}) \leq \dim_R V(f) / m_n^{r+1}V(f) < \infty$.

其它情形的必要性证明是类似的, 这里省去.

衷心感谢导师李培信教授的悉心指导和鼓励.

参 考 文 献

[1] John D D, Charles N F. *Product Integration with Application to Differential Equation* [M]. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.

[2] John Mather. *Stability of C^∞ Mappings* III: *Finitely Determined Map-Germ* [J]. Pulb. Math. IHES, 1969, **35**: 127-156.

[3] Wall C T C. *Finite Determinacy of Smooth Map-germs* [J]. Bull. London. Math. Soc, 1981, **13**: 481-539.

On the Finite Determinacy of Smooth Map-germs under Some Subgroups of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{K}$

Xiong Jianfei

(Inst. of Appl. Math., Qingdao University, 266071)

Abstract

With help of product integration theory this paper gives the necessary and suffient conditions for finite determinacy of smooth map-germs under some subgroups of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{K}$.

Keywords map-germ, finite determinacy, subgruops of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{K}$.