第19卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 19 No. 2
1999年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1999

Riordan 群的反演链及在组合和中的应用*

马 欣 荣
(苏州大学数学科学学院, 215006)

摘　要: 利用函数复合关系, 本文在 Riordan 群中引入 Riordan 反演链的概念及其 Riordan 反演链存在的充要条件, 给出计算组合和式的递推方法. 进一步讨论了二项式系数所对应的 Riordan 反演链问题, 建立了一个 Riordan 求和公式, 该式蕴含了某些与 Fibonacci 数相关的恒等式在内的一系列组合恒等式.

关键词: Riordan 群, Riordan 链, Riordan 偶, 恒等式
分类号: AMS(1991) 05A15/CLC O157.1
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0445-07

1 引　言

判断组合和式的封闭性和给出组合和式的分类是组合分析中两个久悬未决的问题. 最近, Shapiro[2]和 Sprugnoli[3]分别提出 Riordan 群和 Riordan array 理论, 以求给出前一问题的肯定的回答. 为本文自成体系, 现引述其主要定义和结果如下.

定理1　设 $f(t), g(t)$ 和 $F(t)$ 是实函数, $f(0)=0, g(0)\neq 0$, 且 $F(t)=\sum_{k\geq 0} a_k t^k$, 系数 $d_{n,k}=[t^n]g(t)f^k(t)$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}a_k = [t^n]g(t)F(f(t)), \tag{1}$$

其中 $[t^n]g(t)f^k(t)$ 表示函数 $g(t)f^k(t)$ 中 t^n 项的系数.

无穷阶下三角矩阵 $(d_{n,k})$ 又被记为 $A=(g(t), f(t))$.

显然, 当 $g(t)F(f(t))$ 在 $t=0$ 点处的 Taylor 级数存在且易求, 则从(1)式知组合和式 $\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}a_k$ 是封闭的.

定义1　无穷阶实下三角矩阵集合

$$M_R=\{A=(g(t), f(t))\,|\,f(t), g(t)\in R[t], g(0)\neq 0, f(0)=0\}$$

依照通常的矩阵乘法构成群, 称之为 Riordan 群.

不难验证, M_R 中任意两个矩阵之积具有下面性质

* 收稿日期: 1996-03-11; 修订日期: 1998-06-23

作者简介: 马欣荣(1964-), 男(回族), 宁夏平罗县人, 博士, 现为苏州大学副教授. 主要从事计算组合数学与编码密码学的研究.

性质1 $\forall A=(g(t),f(t)),B=(g_1(t),f_1(t))\in M_R$, 则 $A\cdot B=(g(t)g_1(f(t)),f_1(f(t)))$.

Riordan 群的本质在于函数的复合运算, 而从复合运算的角度讨论组合和式及反演关系的思想较早地出现在徐利治提出的广义 Stirling 偶的概念中[4,5]. 本文目的就是利用函数的复合关系, 讨论 M_R 中元素间的一种特殊结构——Riordan 反演链及其在组合和中的作用, 并且证明: 在适当条件下, 这种反演链是 M_R 某类子集合的等价关系, 为组合和式封闭性及其分类问题提供一条新途径 作为初步性的工作, 较详细地讨论二项式系数的 Riordan 反演链和求和公式 文中涉及的术语, 除非另作说明, 均以[2, 3]为标准, 不再冗述

2 定义和定理

定义2 $\forall A=(a_{n,k})=(g(t),f(t)),B=(b_{n,k})=(c_1(t),d_1(t))$ 和 $C=(c_{n,k})=(c_2(t),d_2(t))\in M_R$. 假定 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是满足下式的两个无穷实数列

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}a_k, \tag{2}$$

构作新的无穷实数列

$$a_n'=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}a_k, \tag{3}$$

$$b_n'=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}b_k. \tag{4}$$

若仍有关系式

$$b_n'=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}a_k', \tag{5}$$

则将这样一个递推过程称为 A 的 Riordan 反演链, 简称为 Riordan 链 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, $\{a_n'\}$ 和 $\{b_n'\}$ 统称为 A 的 Riordan 偶 分别将以上 Riordan 链和 Riordan 偶记作 $(A;B,C)$ 和 $(A;a_n,b_n)$.

既如此, 可以给出 M_R 中元素构成 Riordan 链的充要条件

定理2 $\forall A=(g(t),f(t)),B=(c_1(t),d_1(t))$ 和 $C=(c_2(t),d_2(t))\in M_R$, Riordan 链 $(A;B,C)$ 存在的充分必要条件是

$$c_1(t)g(f^{-1}(t))=c_2(f^{-1}(t))g(d_2(f^{-1}(t))), \tag{6}$$

且

$$d_1(t)=f(d_2(f^{-1}(t))) \tag{7}$$

其中 $f^{-1}(t)$ 表示 $f(t)$ 的反函数

证明 利用定义2直接验证即可, 故略

推论1 $\forall A=(g(t),f(t)),B=(c_1(t),d_1(t))$ 和 $C=(g(t),d(t))$, 则 $(A;B,C)$ 存在当且仅当 $c_1(t)=g(d(f^{-1}(t)))$, $d_1(t)=f(d(f^{-1}(t)))$.

推论2 $\forall A=(g(t),f(t)),B=(c_1(t),d_1(t))$ 和 $C=(d(t),t)\in M_R$, 则 $(A;B,C)$ 存在当且仅当 $c_1(t)=d(f^{-1}(t))$ 且 $d_1(t)=t$

本定理也可以用生成函数来刻画

定理3 $\forall A=(g(t),f(t)),B=(c_1(t),d_1(t))$ 和 $C=(c_2(t),d_2(t))\in M_R$，假定 $F(t)=\sum_{k\ge0}a_kt^k,G(t)=\sum_{k\ge0}b_kt^k,F_1(t)=\sum_{k\ge0}a_k't^k$ 和 $G_1(t)=\sum_{k\ge0}b_k't^k$，且有关系式

$$G(t)=g(t)F(f(t)),F_1(t)=c_1(t)F(d_1(t)),G_1(t)=c_2(t)G(d_2(t))$$

则 $G_1(t)=g(t)F_1(f(t))$ 当且仅当(6, 7)成立

特别当矩阵 A,B 和 C 均为可逆矩阵时，则有以下的结论

定理4 $\forall A\in M_R,A^{-1}$ 存在，则 $(A;B,C)$ 存在当且仅当 $(A^{-1};C,B)$ 存在

定义3 $(A^{-1};C,B)$ 称为 $(A;B,C)$ 的共轭链

定义4 A 的任意两个Riordan偶 $(A;a_n,b_n)$ 和 $(A;a_n',b_n')$ 称为同链的，若存在可逆的矩阵 $B=(b_{n,k}),C=(c_{n,k})\in M_R,a_n'=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}a_k,b_n'=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}b_k$。于是可推知

定理5 同链关系是 A 的所有Riordan偶的等价关系

从理论上看，同链关系可以用来划分组合恒等式，共轭链又可以用来给出组合恒等式的等价变形，确有必要对此进行深入研究 进一步地，利用矩阵幂和函数的复合运算，可给出推论1更一般的形式

定理6 $\forall A=(g(t),f(t)),B=(c_1(t),d_1(t))$ 和 $C=(g(t),d(t))\in M_R$，且 $(A;B,C)$ 存在，则 $(A;B^m,C^m)$ 也存在，其中

$$B^m=\left(\prod_{i=1}^{m}g(d^i(f^{-1}(t))),f(d^m(f^{-1}(t)))\right),\quad C^m=\left(\prod_{i=0}^{m-1}g(d^i(t)),d^m(t)\right),$$

其中 $d^0(t)=t,d^i(t)=d^{i-1}(d(t)),m$ 为自然数

证明 可用数学归纳法证明，略去

3 二项式系数的Riordan链

本节主要就 $A=\left(\binom{n}{k}\right)=\left(\frac{1}{1-t},\frac{t}{1-t}\right)\in M_R$，计算它的Riordan反演链和相应的求和公式 在此情形下，定理2诱导出如下定理

定理7 $\left(\left(\binom{n}{k}\right);B,C\right)$ 存在当且仅当

$$B=\left(\frac{1}{1-d\left(\frac{t}{1+t}\right)},\frac{d\left(\frac{t}{1+t}\right)}{1-d\left(\frac{t}{1+t}\right)}\right)\text{ 且 }C=\left(\frac{1}{1-t},d(t)\right)\in M_R.$$

最易考虑的情形便是 $d(t)=t$ 结合定理6和定理7，很自然地导出

定理8 $\forall\left(\left(\binom{n}{k}\right);a_n,b_n\right)$，构作新的实数数列 $\{a_n'\},\{b_n'\}$ 如下:

$$a_n'=\begin{cases}\sum_{k=n-m}^{n}\binom{m}{n-k}a_k, & n\ge m;\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{n-k}a_k, & n\le m.\end{cases}\tag{8}$$

$$b_n' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k', \tag{9}$$

则有关系式

$$b_n' = \sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} b_k. \tag{10}$$

此定理称为二项式系数 $\left(\binom{n}{k}\right)$ 所对应的 Riordan 求和公式

若 Riordan 偶 $\left(\left(\binom{n}{k}\right); a_n, b_n\right)$ 具有某种线性移位性(见下定义), 则从定理8中又可演变为

定理9　设 $A = \left(\binom{n}{k}\right)$ 的 Riordan 偶为 $(a_n(r), b_n(r))$, r 为参数 数列 $\{a_n(r)\}$ 满足线性移位性, 即

$$a_k(r) + a_{k-1}(r) = c(r,s)a_k(r+s), \tag{11}$$

其中 $c(r,s)$ 与 k 无关的常数 则

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} b_k(r) = c^m(r,s)b_n(r+ms) + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \{a_k(r,m) - c^m(r,s)a_k(r+ms)\}, \tag{12}$$

其中 $a_k(r,m) = \sum_{\substack{l=k-m \\ l\geq 0}} \binom{m}{k-l} a_l(r)$.

证明　利用线性移位性可归纳地证明

$$\sum_{k=n-m}^{n} \binom{m}{n-k} a_k(r) = c^m(r,s)a_n(r+ms),\ n \geq m.$$

利用(8)和(9)构作新的 Riordan 偶

$$a_n(r,m) = \sum_{k=n-m}^{n} \binom{m}{n-k} a_k(r),$$

$$\begin{aligned} b_n(r,m) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(r,m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} a_k(r,m) + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} a_k(r,m) \\ &= c^m(r,s) \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} a_k(r+ms) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \{a_k(r,m) - c^m(r,s)a_k(r+ms)\}, \end{aligned}$$

且由(11)知 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(r+ms) = b_n(r+ms)$. 故知原命题成立

4　一些基本的 Riordan 偶

本节主要根据 G. H. Gould[7]所收集的550个组合恒等式, 选择性地给出 $\left(\binom{n}{k}\right)$ 的一些 Riordan 偶及性质, 结合上节所得结论, 具体给出各自的求和公式, 意在说明前面结论的意义

	a_n 或 $a_n(r)$	b_n 或 $b_n(r)$	备　注
1	F_n	F_{2n}	$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$
2	$\mu^n F_{nq+r}$	$\lambda^n F_{np+r}$	$F_0=F_1=1$ $\lambda=(-1)^p F_q/F_{q-p}$ $\mu=(-1)^p F_p/F_{q-p}$
3	$\binom{x}{n+r}$	$\binom{n+x}{n+r}$	$a_n(x)+a_{n-1}(x)=a_n(x+1)$
4	$(-1)^n\binom{x-n}{r}$	$\binom{x-n}{r-n}$	$a_n(r)+a_{n-1}(r)=-a_n(r-1)$
5	$\frac{(-1)^n}{\binom{b+n}{c}}$	$\frac{c}{c+n}\cdot\frac{1}{\binom{n+b}{b-c}}$	$a_n(c)+a_{n-1}(c)=(-\frac{c}{c+1})a_n(c-1)$
6	$\frac{\binom{z}{n}}{\binom{x+n}{x}}$	$\frac{\binom{x+z+n}{n}}{\binom{x+n}{n}}$	$a_n(z)+a_{n-1}(z)=\frac{z+x+1}{z+1}a_n(z+1)$
7	$\frac{(-1)^n\binom{z}{n}}{\binom{y}{n}}$	$\frac{\binom{z-y}{n}}{\binom{y}{n}}$	$a_n(z)+a_{n-1}(z)=(-\frac{y-z}{z+1})a_n(z+1)$

图1 $\left(\binom{n}{k}\right)$ 的Riordan偶

经计算, 不难给出以上各个Riordan偶所诱导的组合和式 限于篇幅, 各式的具体计算过程一并略去

1. $F_{2n+m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{m-1+n-k}{m-1}F_{2k}$, $F_{n+m}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F_{2k+m}$, $F_m=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{m}{n-k}F_{2k+m}$, $F_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{m-1+n-k}{m-1}F_{2k+m}$, 其中后三式由 $\left(\left(\binom{y}{k}\right);B,C\right)$ 的共轭链 $\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k};C,B\right)$ 诱导出来的

2. 根据Carlitz[6]所得结论, 可由归纳法证明

$$\sum_{k=n-m}^{n}\binom{m}{n-k}\mu^kF_{kq+r}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\mu^nF_{mp+(n-m)q+r}.$$

利用定理9和(12), 可得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m-1+n-k}{m-1}\lambda^kF_{kp+r}=\frac{\lambda^{m+n}}{\mu^m}F_{(m+n)p-mq+r}+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{k}\left\{a_k'-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\mu^kF_{kp+(p-q)m+r}\right\},$$

其中 $a_k' = \sum_{k\geq n-m}^{n} \binom{m}{n-k} \mu^k F_{kq+r}$.

3. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} \binom{k+x}{k+r} = \binom{n+m+x}{n+r}.$$

4. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} \binom{x-k}{r-k} = (-1)^m \binom{x-n}{r-m-n} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \{a_k(r,m) + (-1)^{m+1} a_k(r-m)\},$$

其包括下式($m=1$)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x-k}{r-h} = \binom{x+1}{r} - \binom{x-n}{r-n-1}.$$

5. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} \frac{c}{c+k} \frac{1}{\binom{b+k}{b-c}} = \left(-\frac{c}{c+1}\right)^m \frac{c+m}{c+m+n} \frac{1}{\binom{b+n}{b-c-m}} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \{a_k(c,m) - \left(\frac{-c}{c+1}\right)^m a_k(c+m)\},$$

此处 $b \geq c+m$.

$m=1$ 则立刻有

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c}{c+k} \frac{1}{\binom{b+k}{b-c}} = \frac{1}{\binom{b}{c}} + \frac{c}{c+1} \frac{1}{\binom{b}{c+1}} - \frac{c}{c+1+n} \frac{1}{\binom{b+n}{b-c-1}}.$$

6. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} \frac{\binom{x+z+k}{k}}{\binom{x+k}{k}} = \left(\frac{x+z+1}{z+1}\right)^m \frac{\binom{x+z+n+m}{n}}{\binom{x+n}{x}} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \{a_k(z,m) - \left(\frac{x+z+1}{z+1}\right)^m a_k(z+m)\},$$

$m=1$ 时特别推得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{x+z+k}{k}}{\binom{x+k}{k}} = \frac{x}{z+1} + \frac{x+z+1}{z+1} \frac{\binom{x+z+1+n}{n}}{\binom{x+n}{n}}.$$

7. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+n-k}{m-1} \frac{(-1)^k \binom{y-z}{k}}{\binom{y}{k}} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \{a_k(z,m) - \left(\frac{z-r}{z+1}\right)^m a_k(z+m)\}.$$

各式中 $a_k(z,m)$ 均由定理 8 给出

附注　本文所得结论亦可以用以建立新的关系式,如下例

8　由[7]知组合恒等式 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$,故可得 $\left(\binom{n}{k}\right)$ 的 Riordan 偶 $a_n=(-1)^k\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, $b_n=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$,代入定理8(此时 $m=1$),便得新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}=\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

关于在同链关系下划分 Riordan 偶的问题将在作者后续工作中加以探讨.

参 考 文 献

[1] 徐利治. 两种反演技巧在组合分析中的应用[J]. 辽宁大学学报, 1981, **3**: 1-11.

[2] Shapiro L W, Getu S et al. *The Riordan group* [J]. Discrete Applied Mathematics, 1991, **34**: 229-239.

[3] Sprugnoli R. *Riordan arrays and combinatorial sums* [J]. Discrete Mathematics, 1994, **132**: 267-290.

[4] Hsu L C. *Generalized striling number pairs associated with inverse relations* [J]. Fibonacci Quarterly, 1987, **25**: 346-351.

[5] Hsu L C. *Theory and application of generalized stirling numbers pairs* [J]. J. Math. Res & Exp., 1989, **9**: 211-220.

[6] Carlitz L. *Some classes of Fibonacci sums* [J]. Fibonacci Quarterly, 1978, **16**(5): 411-416.

[7] Gould H W. *Combinatorial Identities* [M]. Morgantown Printing and Binding Co., 1972.

[8] Egorychev G P. *Integral representation and the computations of combinatorial sums* [J]. Amer. Math. Soc. Translations, 1984, **59**

The Inverse Chains of Riordan Group with Application to Combinatorial Sums

Ma Xinrong

(Dept. of Math., Suzhou University)

Abstract

The present paper is concerned with inverse chains of Riordan group and its application to combinatonial sums. The general principle of inverse chains is discussed. Furthermore, Riordan chains and Riordan formulae are exhibited related to binomial coefficient, the latter includs a series of combinatorial sums.

Keywords Riordan group, Riordan pair, inverse chain, identity.