第19卷第2期　　　　　　数 学 研 究 与 评 论　　　　　　Vol. 19 No. 2
1999年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1999

关于LIH KO-WEI猜想的证明*

李　大　超
(海南师范学院数学系, 海口571158)

分类号　AMS(1991) 05D/CLC O157
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0452-01

Lin Ko-Wei[1]提出猜想: 如果 F 是由 B^n 中固定秩的不同元素生成的序理想, 那么 F 是 Sperner 系[1], 黄国泰就 F 是由 X 的子集 Y 的所有相同秩的元素生成的序理想, 证实了上述猜想[2], 本文完全证明了该猜想. 本文使用的概念, 符号见[2].

定理　设 $a_1, a_2, \cdots, a_k \in B^n$, 且 $r(a_1) = r(a_2) = \cdots = r(a_k)$, 那么 $F = \langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle = \bigcup_{i=1}^{k} \langle a_i \rangle$ 是 Sperner 系.

证明　令 $F = \bigcup_{i=1}^{k} a_i$, $F' \triangleq \bigcup_{\substack{a \subseteq Y \\ r(a) = r(a_1)}} \langle a \rangle$, 则 $F \subseteq F'$. 记 $F^c = \bigcup_{\substack{a \subseteq Y \\ r(a) = r(a_i) \\ a \neq a_i \\ 1 \leq i \leq k}} \langle a \rangle$, 易证 $F \cup F^c = F'$. 又记 $F_t = \{x \in F \mid r(x) = t\}$, $f_t = |F_t|$; $F_t' = \{x \in F' \mid r(x) = t\}$, $f_t' = |F_t'|$; 和 $F_t^c = \{x \in F^c \mid r(x) = t\}$, $f_t^c = |F_t^c|$. 易见, 当 $t = r(a_1)$ 时, $F_t \cap F_t^c = \varnothing$; 当 $t > r(a_1)$ 时, $F_t \cap F_t^c \neq \varnothing$.

设 A, A^c 和 A' 分别为 F, F^c 和 F' 的容量最大的反链, 并用 $A \vee A^c$ 表示 $A \cup A^c$ 中极大元组成的集合; $A \wedge A^c$ 表示 $A \cup A^c$ 中极小元组成的集合. 显然, $(A \wedge A^c) \cup (A \vee A^c) = A \cup A^c$, 且 $A \wedge A^c$ 和 $A \vee A^c$ 都是 F' 的反链. 下面先证明两个结论.

结论1　或者 $A \vee A^c$ 是 F' 的容量最大的反链, 或者 $A \wedge A^c$ 是 F' 的容易最大的反链.

事实上, 不妨设 $|A \vee A^c| \geq |A \wedge A^c|$ (对于 $|A \wedge A^c| \geq |A \vee A^c|$ 的情形类似可以证明). 于是, 只需证明 $A \vee A^c$ 是 F' 的容量最大的反链.

由 A' 是 F' 的容量最大的反链, 有 $A' \cap F$ 和 $A' \cap F^c$ 分别是 F 和 F^c 的反链. 又 A 和 A^c 分别是 F 和 F^c 的容量最大的反链, 从而有 $|A| \geq |A' \cap F|$ 和 $|A^c| \geq |A' \cap F^c|$. 于是, $|A \vee A^c| \geq |(A' \cap F) \vee (A' \cap F^c)| = |A'|$. 所以 $A \vee A^c$ 为 F' 的容量最大的反链. 故结论1成立. 类似可得

结论2　$A' \cap F$ 和 $A' \cap F^c$ 分别是 F 和 F^c 的容量最大的反链.

由结论2知, $A' \cap F$ 是 F 的容量最大的反链, 及[2]中定理2.8知 $|A'| = \max_s \{f_s'\}$, 从而得 $|A' \cap F| = \max_s \{f_s\}$. 因此, F 是 Sperner 系.

参　考　文　献

[1]　Ko-Wei Lih. *Sperner families over a subset* [J]. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 1980, 29.
[2]　黄国泰. 有限子集系的 Sperner 系 [J]. 数学研究与评论, 1998, **18**: 429-434.

* 收稿日期: 1997-07-13