第19卷第2期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 2
1999年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1999

具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵*

李耀堂 游兆永
(云南大学数学系, 昆明650091) (西安交通大学理学院, 西安710049)

摘　要: 本文引进了具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵的概念, 讨论了它的性质及其与具非零元素链对角占优矩阵, 非奇 H -矩阵等的关系.

关键词: 对角占优矩阵, 非奇 H -矩阵.
分类号 AMS(1991) 15A57/CLC O151.21
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0458-05

1 引　言

对角占优矩阵在特征值的分布, 迭代矩阵的收敛性等方面所具有的良好性质, 促使人们寻找仍具有这些性质, 但较对角占优矩阵类更为广泛的矩阵类. 满足条件

$$A = (a_{ij}) \in C^{n\times n} \text{ 且 } |a_{ii}a_{jj}| \geq \sum_{k\neq i}|a_{ik}|\cdot\sum_{k\neq j}|a_{jk}|, i \neq j \tag{*}$$

的矩阵类便是其中之一. 关于此类矩阵以及与此相关的矩阵类, 已有许多研究结果[1, 2, 3, 5]. 然而在研究中不同的作者使用不同的术语和符号. 如文[1]称其为双对角占优矩阵, 文[2], [5]称其为连对角占优矩阵, 而文[3]则称其为广义对角占优矩阵. 这种现象为其研究带来了诸多不便. 由于(*)式实质上是 $|a_{ii}|$ 和 $|a_{jj}|$ 的几何平均值与 $\sum_{k\neq i}|a_{ik}|$ 和 $\sum_{k\neq j}|a_{jk}|$ 的几何平均值的比较. 因此, 在本文中我们给出此类矩阵一个较为合理的命名 — 二重几何平均对角占优矩阵以强调其所具有的这一特征, 并以此观点对其做进一步研究. 本文主要讨论具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵, 研究它的性质, 它与严格二重几何平均对角占优矩阵、具非零元素链对角占优矩阵以及非奇 H - 矩阵的关系, 得到了几个有意义的结果.

2 具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵、严格二重几何平均对角占优矩阵及具非零元素链对角占优矩阵

令 $C^{n\times n} = \{A \mid A \text{ 为 } n \text{ 阶复矩阵}\}$, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, 记

$$R_i(A) = \sum_{j\neq i}|a_{ij}|, \quad i \in N,$$

* **收稿日期**: 1996-05-20
作者简介: 李耀堂(1958-), 男, 陕西人, 博士, 现为云南大学数学系副教授.

并在不致引起误解的情况下简记 $R_i(A)$ 为 R_i. 采用文[1]的记号, 若 A 为对角占优矩阵, 记为 $A\in D_0$; 若 A 为严格对角占优矩阵, 记为 $A\in D$.

定义 1 设 $A\in C^{n\times n}$, 若存在正对角矩阵 X 使, $AX\in D_0$, 则称 A 为 H-矩阵, 记为 $A\in D_0^*$; 若 $AX\in D$, 则称 A 为非奇 H-矩阵, 记为 $A\in D^*$.

注 这里的 H-矩阵就是文[1]中的广义对角占优矩阵, 非奇 H-矩阵就是文[1]中的广义严格对角占优矩阵. 也就是文[4]中的拟对角占优矩阵.

定义 2 设 $A\in C^{n\times n}$, 若

$$\left|a_{ii}a_{jj}\right|\geq R_i(A)R_j(A),\ \forall\quad i,j\in N,\ i\neq j \qquad (**)$$

成立, 则称 A 为二重几何平均对角占优矩阵, 记为 $A\in DD_0$; 若(**)式中不等号严格成立, 则称 A 为严格二重几何平均对角占优矩阵, 记为 $A\in DD$.

引理 1[2] 若 $A\in DD$, 则 $A\in D^*$, 即 A 为非奇 H-矩阵.

定义 3 设 $A\in C^{n\times n}$, 若 A 满足

1° $A\in DD_0$;

2° $G(A)=\{i\in N\mid \left|a_{ii}a_{jj}\right|>R_iR_j,\ \forall j\in N,\ j\neq i\}\neq\varnothing$;

3° 设 $J^*(A)=\{(i,j)\mid \left|a_{ii}a_{jj}\right|=R_iR_j,\ i,j\in N,\ i\neq j\}$, $\forall(i,j)\in J^*(A)$, 存在 A 的非零元素链 $a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rj_0}$, 使得 $i_0=i$ 或 $i_0=j$ 且 $j_0\in G(A)$ (此时称有非零元素链连接 (i,j) 与 $G(A)$),

则称 A 为具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵, 记为 $A\in ND$.

定理 1 (i) 若 $A\in DD$, 则 $A\in ND$.

(ii) 若 $A\in ND$, 则 $a_{ii}\neq 0,\ \forall_i\in N$.

证明 当 $A\in DD$ 时, 显然 $A\in DD_0$ 且 $G(A)=\{1,2,\cdots,n\}$, 故此时 $J^*(A)=\varnothing$, 于是 A 满足定义 3 的 1°—3°条, 所以 $A\in ND$, (i) 得证. 当 $A\in ND$ 时, 由 $G(A)\neq\varnothing$ 可直接得出 $a_{ii}\neq 0,\ \forall i\in N$, (ii) 得证.

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix},$$

则由定义易验证 $A\notin DD$, 但 $A\in ND$. 由此可知 $DD\subset ND$, 但 $DD\neq ND$, 即严格二重几何平均对角占优矩阵是具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵的特款.

定理 2 设 A 为具非零元素链对角占优矩阵, 则 $A\in ND$.

证明 设 A 具非零元素链对角占优, 则由其定义[4]易知:

1° $A\in ND_0$;

2° 存在 $i\in N$, 使 $\left|a_{ii}\right|>R_i$, 又因对任意 $j\in N$, $\left|a_{jj}\right|\geq R_j$, 故 $\left|a_{ii}a_{jj}\right|>R_iR_j,\ \forall j\in N,\ j\neq i$, 即 $i\in G(A)$, 所以 $G(A)\neq\varnothing$.

3° 若 $J^*(A)=\varnothing$, 则定理成立. 若 $J^*(A)\neq\varnothing$, $\forall(i,j)\in J^*(A)$, $\left|a_{ii}a_{jj}\right|=R_iR_j$, 由于 $\left|a_{ii}\right|\geq R_i$, $\left|a_{jj}\right|\geq R_j$, 故必有 $\left|a_{ii}\right|=R_i$, $\left|a_{jj}\right|=R_j$; 而由具非零元素链对角占优矩阵之定义知, 存在非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rk}$ 使 $\left|a_{kk}\right|>R_k$, 而此时显然 $k\in G(A)$. 故存在非零元素链连接 $(i,$

j）与 $G(A)$. 于是 A 满足定义 3 的条件, 故 $A \in ND$.

例 2　设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix},$$

则 A 不是具非零元素链对角占优矩阵, 但 $A \in ND$. 由此可知, ND 是一类比具非零元素链对角占优矩阵更为广泛的矩阵

3　具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵与非奇 H - 矩阵

定理 3　设 $A \in ND$, 则 $A \in D^*$, 即 A 为非奇 H - 矩阵

证明　设 $A \in ND$, 当 $J^*(A) = \varnothing$ 时, $A \in DD$. 于是由引理 1 知 A 为非奇 H - 矩阵. 当 $J^*(A) \neq \varnothing$ 时, 我们分两种情况来讨论, 为叙述方便, 令

$$J_1(A) = \{i \in N \mid |a_{ii}| < R_i\}, J_2(A) = \{i \in N \mid |a_{ii}| = R_i\}.$$

由定义 3 的 1°与 2°知 $|J_1(A)| \leq 1$(即 $J_1(A)$ 至多有一个元素) 且当 $J_1(A) \neq \varnothing$ 时 $J_2(A) = \varnothing$, 故我们可分 $J_1(A) = \varnothing$ 与 $J_1(A) \neq \varnothing$ 两种情况分别讨论

情况 1　$J_1(A) = \varnothing$, 此时由 $J^*(A) \neq \varnothing$ 知 $J_2(A) \neq \varnothing$ 且 $|J_2(A)| \geq 2$, 设 $J_2(A) = \{i_1, i_1, \cdots, i_k\}$, 再由 $G(A) \neq \varnothing$ 知 $2 \leq k \leq n-1$. 于是当 $i \overline{\in} J_2(A)$ 时, $|a_{ii}| > R_i$. 不失一般性, 我们可设 $i_1 = 1, \cdots, i_k = k$, 于是由定义 3 的 3°知至少存在一个 $t, 1 \leq t \leq k$ 和 $j_0, k+1 \leq j_0 \leq n$, 使 $a_{tj_0} \neq 0$. 不妨设 $a_{kj_0} \neq 0$, 由于 $j_0 \overline{\in} J_2(A)$, 所以有 $|a_{j_0j_0}| > R_{j_0}$, 故可适当选取 $0 < \epsilon < 1$, 使得

$$|a_{j_0j_0}| \epsilon > R_{j_0}. \tag{1}$$

取正对角阵 $X_1 = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, \epsilon, 1, \cdots, 1)$, 其中 ϵ 位于第 j_0 列 记 $B = (b_{ij}) = AX_1$, 则

$$b_{ij} = a_{ij} (\forall i \in N, j \neq j_0), b_{ij_0} = \epsilon a_{ij_0}, i \in N. \tag{2}$$

于是

$$R_k(B) = \sum_{j \neq k} |b_{kj}| = |b_{kj_0}| + \sum_{j \neq k, j_0} |b_{kj}| = \epsilon |a_{kj_0}| + \sum_{j \neq k, j_0} |a_{kj}| < \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = R_k,$$

$$R_{j_0}(B) = \sum_{j \neq j_0} |b_{j_0j}| = \sum_{j \neq j_0} |a_{j_0j}| = R_j,$$

所以

$$|b_{ii}| = \begin{cases} |a_{ii}| = R_i \geq R_i(B), & 1 \leq i \leq k-1, \\ |a_{kk}| = R_k > R_k(B), \\ |\epsilon a_{j_0j_0}| > R_{j_0} = R_{j_0}(B), \\ |a_{ii}| > R_i \geq R_{j_0}(B), & k+1 \leq i \leq n, i \neq j_0. \end{cases} \tag{3}$$

显然 B 与 A 有相同的零位模式, 故由(3) 式知仍有 $B \in ND$, $J_1(B) = \varnothing$ 且 $|J_2(B)| \leq k-1$, 若 $|J_2(B)| \leq 1$, 则 $B \in DD$, 于是由引理 1 知 $B \in D^*$, 即存在正对角阵 Y 使 $BY = AX_1Y \in D$, 而 X_1Y 仍为正对角阵, 故 $A \in D^*$. 若 $J_2(B) \geq 2$, 则 $J^*(B) \neq \varnothing$, 用 $B = AX_1$ 代替 A 进行上述类似讨论, 则至多有 $k-1$ 个正对角阵 $X_1, \cdots, X_{k-1}$ 使 $S = AX_1 \cdots X_{k-1} \in DD$. 由引理 1 知 $S \in D^*$, 于是存在正对角阵 X 使 $SX = AX_1 \cdots X_{k-1}X \in D$, 而 $X_1 \cdots X_{k-1}X$ 仍为正对角阵, 故

$A\in D^*$, 即 A 为非奇 H-矩阵

情况 2 $J_1(A)\neq\varnothing$, 此时由 $|J_1(A)|=1$ 且 $J_2(A)=\varnothing$, 即只有一个 $i\in N$, 使 $|a_{ii}|<R_i$, 而任何 $j\in N$, $j\neq i$ 都有 $|a_{jj}|>R_j$, 不妨设 $|a_{11}|<R_1$, $|a_{22}|>R_2$, $\cdots$, $|a_{nn}|>R_n$ 且 $G(A)=\{n\}$. 又设 A 的第一行的非零元素依次为 $a_{1i_1}, a_{1i_2}, \cdots, a_{1i_k}$ $(2\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n)$. 由 $n\in G(A)$ 知

$$|a_{11}a_{nn}|>R_1R_n,$$

故可适当选取 $0<\epsilon<1$, 使

$$\epsilon|a_{11}a_{nn}|>R_1R_n. \tag{4}$$

又因 $|a_{11}|<R_1$, 所以 $\epsilon|a_{nn}|>R_n$, 取正对角阵

$$X_1=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\epsilon),$$

记 $B=(b_{ij})=AX_1$, 则

$$b_{ij}=a_{ij}, \forall i,j\in N, j\neq n, b_{in}=\epsilon a_{in}, \forall i\in N. \tag{5}$$

因而当 $a_{1n}\neq 0$ 时

$$R_1(B)=\sum_{j\neq 1}|b_{1j}|=|b_{1n}|+\sum_{j\neq 1,n}|b_{1n}|=\epsilon|a_{1n}|+\sum_{j\neq 1,n}|a_{1j}|<R_1. \tag{6}$$

再由 $n\in G(A)$ 和(4) - (6) 及 $\epsilon|a_{nn}|>R_n$ 得

$$\begin{aligned}
&|b_{11}b_{nn}|=\epsilon|a_{11}a_{nn}|>R_1R_n\geq R_1(B)R_n(B),\\
&|b_{11}b_{ii}|=|a_{11}a_{ii}|\geq R_1R_i>R_1(B)R_i(B),\quad 1<i<n,\\
&|b_{ii}b_{jj}|=|a_{ii}a_{jj}|>R_iR_j\geq R_i(B)R_j(B), i\neq j,\quad 1<i,j<n,\\
&|b_{ii}b_{nn}|=\epsilon|a_{nn}a_{ii}|>R_iR_n\geq R_i(B)R_n(B),\quad 1<i<n.
\end{aligned}$$

由此可见 $B\in DD$, 故 $B\in D^*$, 即存在正对角阵 Y 使 $BY=AX_1Y$ 为严格对角占优, 故 $A\in D^*$, 即 A 为非奇 H-矩阵

当 $a_{1n}=0$ 时, 由定义 2 的 3°及 $G(A)=\{n\}$ 知, 存在 $j_0\neq 0, n$ 使 $a_{j_0n}\neq 0$, 此时由(5) 式知

$$R_{j_0}(B)=\sum_{t\neq j_0}|b_{j_0t}|=\epsilon|a_{j_0n}|+\sum_{t\neq j_0,n}|a_{j_0t}|<R_{j_0},$$

$$R_i(B)=\sum_{t\neq i}|b_{it}|=\epsilon|a_{in}|+\sum_{t\neq i,n}|a_{it}|\leq R_i, i\neq j_0.$$

于是由定义 3 的 1°和(4) 式以及 $\epsilon|a_{nn}|>R_n$ 得

$$\begin{aligned}
&|b_{11}b_{nn}|=\epsilon|a_{11}a_{nn}|>R_1R_n=R_1(B)R_n(B),\\
&|b_{11}b_{j_0j_0}|=|a_{11}a_{j_0j_0}|\geq R_1R_{j_0}>R_1(B)R_{j_0}(B),\\
&|b_{11}b_{ii}|=|a_{11}a_{ii}|\geq R_1R_i\geq R_1(B)R_i(B),\quad i\neq 1, j_0, n,\\
&|b_{ii}b_{j_0j_0}|=|a_{ii}a_{j_0j_0}|\geq R_iR_{j_0}>R_i(B)R_{j_0}(B),\quad i\neq 1, j_0, n,\\
&|b_{nn}b_{ii}|=\epsilon|a_{nn}a_{ii}|>R_nR_i\geq R_n(B)R_i(B),\quad i\neq 1, n,\\
&|b_{ii}b_{jj}|=|a_{ii}a_{jj}|\geq R_iR_j\geq R_i(B)R_j(B), i,j\neq 1, j_0, n.
\end{aligned}$$

又因 B 与 A 有相同的零位模式, 于是仍有 $B\in ND$ 且 $j_0, n\in G(B)$. 此时若已有 $B\in DD$, 则同前可证 $A\in D^*$. 若 $B\notin DD$, 则 B 仍满足情况 2, 以 B 代替 A 进行上述类似讨论得至多有 $n-1$ 个正对角阵 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ 使 $S=AX_1\cdots X_{n-1}\in DD$, 于是由引理 1 知 $S\in D^*$. 故存在正对角阵 X 使 $SX=AX_1\cdots X_{n-1}X\in D$, 而 $X_1\cdots X_{n-1}X$ 仍为正对角阵, 故 $A\in D^*$, 即 A 为非奇 H-矩阵

当 $|G(A)|>1$ 时, 仿上述过程可同样证明 $A\in D^*$.

注　例 1 与例 2 所给矩阵, 由于它们不是严格二重几何平均对角占优也不是具非零元素链对角占优, 因而应用严格二重几何平均对角占优和具非零元素链对角占优理论无法判定它们的非奇异性和拟对角占优性, 而由定理 3 知, 例 1 与例 2 都为拟对角占优矩阵, 即非奇 H -矩阵.

由定理 3 和文[1] 中的引理 5 及文[4] 中的定理 5.9 易得如下结论.

推论 1　设 $A\in R^{n\times n}$ 且 $A\in ND$, 则

(i)　$\mathrm{offdiag}\,A\leq 0$, $a_{ii}>0$, $\forall i\in N$, 则 A 为非奇 M -矩阵;

(ii)　设 A 的谱 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$, 若 $a_{ii}>0$, $i=1,\cdots,n$, 则 $\mathrm{Re}(\lambda_j)>0$, $j=1,\cdots,n$, 若 $a_{ii}<0$, $i=1,\cdots,n$, 则 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$, $j=1,\cdots n$;

(iii)　若 $a_{ii}>0$, $i=1,\cdots,n$, 则 $\det A>0$ 且 A^{-1} 的对角线元皆为正.

注　1° 推论1中的(i)就是[1]中的引理5.

2° 由推论1可知, 具非零元素链二重几何平均对角占优矩阵类是比具非零元素链对角占优矩阵类更为广泛, 但又保留了其基本性质的矩阵类.

参　考　文　献

[1]　逄明贤. 矩阵对角占优性的推广及应用 [J]. 应用数学学报, 1989, **12**(1): 35- 43.

[2]　沈光星. 连对角占优矩阵的一些性质 [J]. 计算数学, 1990, **2**: **132**- **135**.

[3]　杨载朴. 关于广义对角占优矩阵 [J]. 数学研究与评论, **1985**, **5**(4): 21- 24.

[4]　游兆永. 非奇M -矩阵 [J]. 华中工学院, 1981.

[5]　黎　稳. 广义对角占优矩阵的判别准则. 应用数学与计算数学学报 [J], 1995, **9**(2): 35- 38.

[6]　Neumaier A. *On the comparison of H -matrices with M -matrices* [J]. Linear Algebra and Its Application, 1986, **83**: 135- 141.

Doubly Geometric Mean Diagonally Dominant Matrices with Nonzero Elements Chain

Li Yaotang　　*You Zhaoyong*

(Dept. of Math., Yunnan University, Kunming 650091)　(School of Science, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049)

Abstract

The concept of doubly geometric mean diagnally dominant matrices with nonzero elements chain are introduced, and the relations between the matrices and diagnally dominant matrices with nonzero elements chain as well as nonsingular H -matrices are studied.

Keywords　diagnally dominant matrices, nonsingular H -matrices