第19卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 19 No. 2
1999年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1999

特殊半鞅的一个局部性质*

任耀峰　　　　梁汉营
(武汉海军工程学院数学系, 湖北430033)　(同济大学应用数学系, 上海200092)

摘　要: 本文讨论特殊半鞅的一个局部性质, 将局部(平方可积)鞅的结果推广到了一类特殊半鞅的情形。

关键词: 局部鞅, 特殊半鞅, 局部性质
分类号: AMS(1991) 60H05/CLC O211.6
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)-02-0463-04

设 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ 为完备概率空间, $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_t)_{t\geq 0}$ 为一满足通常条件的子 σ-代数族. 以 $\mathbf{M}_{0,loc}$ 表示零初值局部鞅空间, $\mathbf{M}^2_{0,loc}$ 表示零初值局部平方可积鞅空间, $\mathbf{V}^+\cap\mathbf{P}$ 表示零初值可料增过程空间. 用 $[M,M]$ 表示与局部鞅 M 联系的增过程, $\langle M\rangle$ 表示与局部平方可积鞅 M 联系的可料增过程, $\alpha(M)$ 表示局部可积增过程 $[M,M]^{1/2}$ 的可料对偶投影. 设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 为一随机过程, 用 $\{X\to\}$ 表示集合 $\{\lim\limits_{t\to\infty}X_t$ 存在且有穷$\}$. 特殊半鞅的收敛性作为鞅收敛性的推广自然受到许多学者的关注, Liptser 和 Shiryaev 及何声武、汪嘉冈和严加安在他们的专著中都有论述. 对离散参数情形则早有更多的讨论. Liptser 和 Shiryaev 在文献[1]中证明了如下定理:

定理A[1]　设 $M=(M_t)_{t\geq 0}\in\mathbf{M}_{0,loc}$, 若对任何停时 σ, $E[|\triangle M_\sigma| I(\sigma<\infty)]<\infty$, 则

(i) $\{M\to\} = \{[M,M]_\infty<\infty\}$ a.e.　　(1)

(ii) $\{\underline{\lim}_{t\to\infty} M_t = -\infty\}\cap\{\overline{\lim}_{t\to\infty} M_t = \infty\} = \{[M,M]_\infty = \infty\}$ a.e.　　(2)

在文献[5]中, 利用改进的 Lenglart 不等式将定理A 第一部分的结论推广到了一类特殊半鞅情形, 证明了如下结论:

定理B[5]　设 $X = X_0 + M + A$ 为特殊半鞅, 其中 $M\in\mathbf{M}_{0,loc}$, $A\in\mathbf{V}^+\cap\mathbf{P}$, $E|X_0|<\infty$, 若对任何停时 σ, $E[|\triangle X_\sigma| I(\sigma<\infty)]<\infty$, 则

$$\{X\to\} = \{A_\infty + \alpha_\infty(M)<\infty\}\quad \text{a.e.}\tag{3}$$

定理B 的优点是不同于文献[1]和[4]要求 $\triangle X$ 有界, 因而可以包含定理A 的第一部分作为特例. 在本文中, 将定理A 的第二部分结论也推广到这类特殊半鞅情形. 定理的证明需要利用何声武、汪嘉冈和严加安新近在文献[4]中给出的如下定理:

定理C[4]　设 $X = X_0 + M + A$ 为非负特殊半鞅, 其中 $M\in\mathbf{M}_{0,loc}$, $A\in\mathbf{V}^+\cap\mathbf{P}$,

* 收稿日期: 1996-04-09; 修订日期: 1998-01-10
作者简介: 任耀峰(1959-), 男, 山西沁县人, 博士, 副教授, 主要从事随机过程极限定理的研究.

$E\left|X_0\right|<\infty$，则

$$\{A_\infty<\infty\} = \{X \rightarrow\} \cap \{M \rightarrow\} \quad \text{a.e.} \tag{4}$$

下面是本文的主要结果:

定理1 设 $X = X_0 + M + A$ 为特殊半鞅，其中 $M \in \mathbf{M}_{0,loc}, A \in \mathbf{V}^+ \cap \mathbf{P}$, $E\left|X_0\right|<\infty$，若满足

(i) 对任何停时 σ, $E[\left|\triangle X_\sigma\right| I(\sigma<\infty)]<\infty$;

(ii) $\{\sup\limits_{t\geq 0} X_t<\infty\} \cup \{\inf\limits_{t\geq 0} X_t>-\infty\} \subset \{A_\infty<\infty\}$,

则有

$$\{\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t = -\infty\} \cap \{\overline{\lim}_{t\to\infty} X_t = \infty\} = \{A_\infty + \alpha_\infty(M) = \infty\} \quad \text{a.e.} \tag{5}$$

证明 对 $a>0, b>0$，记

$$\tau_a = \inf\{t: X_t \leq -a\}, \quad \sigma_b = \inf\{t: X_t \geq b\},$$

则有

$$\bigcap_{a\in N} \{\tau_a<\infty\} = \{\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t = -\infty\}, \quad \bigcap_{b\in N} \{\sigma_b<\infty\} = \{\overline{\lim}_{t\to\infty} X_t = \infty\}.$$

这里 N 表示自然数全体 定义增过程

$$V^{(1)} = (V_t^{(1)})_{t\geq 0}, \quad V^{(2)} = (V_t^{(2)})_{t\geq 0},$$

这里

$$V_t^{(1)} = (\triangle X_{\tau_a})^- \; I(t \geq \tau_a), \; V_t^{(2)} = (\triangle X_{\tau_a})^+ \; I(t \geq \tau_a).$$

因为

$$E[\left|\triangle X_\sigma\right| I(\sigma<\infty)]<\infty, \; EV_\infty^{(1)}<\infty, \; EV_\infty^{(2)}<\infty,$$

即 $V^{(1)}, V^{(2)}$ 为适应可积增过程，其可料对偶投影存在 记 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 分别为 $V^{(1)}, V^{(2)}$ 的可料对偶投影 令

$$Y_0 = a + X_0^+, \; N_t = V_t^{(1)} - A_t^{(1)}, \; Z_t = M_{t\wedge\tau_a} + N_t,$$

则 $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ 为零初值局部鞅 再记

$$Y_t = Y_0 + A_t^{(1)} + A_{t\wedge\tau_a} + Z_t,$$

则 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ 为特殊半鞅 又因为

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + A_t^{(1)} + A_{t\wedge\tau_a} + Z_t = a + X_0^+ + A_t^{(1)} + A_{t\wedge\tau_a} + M_{t\wedge\tau_a} + V_t^{(1)} - A_t^{(1)} \\ &= a + X_0^+ + A_{t\wedge\tau_a} + M_{t\wedge\tau_a} + V_t^{(1)} \geq a + X_0 + A_{t\wedge\tau_a} + M_{t\wedge\tau_a} + V_t^{(1)} \\ &= a + X_{t\wedge\tau_a} + V_t^{(1)} = a + X_{t\wedge\tau_a} + (\triangle X_{\tau_a})^- \; I(t\geq\tau_a) \\ &\geq (\triangle X_{\tau_a})^- \; I(t\geq\tau_a), \end{aligned}$$

所以 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ 为非负特殊半鞅，且 $E[Y_0]<\infty$. 由定理C

$$\{A_\infty^{(1)} + A_{\tau_a}<\infty\} \subset \{Y \rightarrow\} \quad \text{a.e.}$$

由

$$E[A_\infty^{(1)}] = E[V_\infty^{(1)}] \leq E[\left|\triangle X_{\tau_a}\right| I(\tau_a<\infty)]<\infty,$$

知

$$P(A_\infty^{(1)}<\infty) = 1.$$

又因为对任意 $a>0$, $\{\tau_a = \infty\} \subset \{\inf\limits_{t\geq 0} X_t>-\infty\}$，故由

$$P(A_\infty=\infty,\tau_a=\infty)\le P(A_\infty=\infty,\inf_{t\ge0}X_t>-\infty)=0,$$

知 $P(A_{\tau_a}=\infty)=0$，此即

$$P(A_{\tau_a}<\infty)=1,$$

从而有

$$P(Y\to)=1.$$

由 Y 的定义知 $P(X^{\tau_a}\to)=1$. 由定理B 知

$$P(A_{\tau_a}+\alpha_{\tau_a}(M)<\infty)=1.$$

故有

$$P(A_\infty+\alpha_\infty(M)=\infty,\tau_a=\infty)\le P(A_{\tau_a}+\alpha_{\tau_a}(M)=\infty)=0.$$

亦即

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)=\infty\}\subset\{\tau_a<\infty\}\quad a.e.,$$

从而有

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)=\infty\}\subset\bigcap_{a\in N}[\tau_a<\infty]=\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t=-\infty\}\quad a.e.$$

类似可证

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)=\infty\}\subset\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t=\infty\}\quad a.e.$$

即有

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)=\infty\}\subset\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t=-\infty\}\cap\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t=\infty\}\quad a.e.$$

也即

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)<\infty\}\supset\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t>-\infty\}\cup\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t<\infty\}\quad a.e.$$

由定理B 有

$$\{X\to\}\supset\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t>-\infty\}\cup\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t<\infty\}\quad a.e.$$

而 $\{X\to\}\subset\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t>-\infty\}\cup\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t<\infty\}$ 是自然的包含关系，从而得

$$\{X\to\}=\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t>-\infty\}\cup\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t<\infty\}\quad a.e.$$

再由定理B 即得

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)=\infty\}=\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t=-\infty\}\cap\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t=\infty\}\quad a.e.$$

定理2 设 $X=X_0+M+A$ 为特殊半鞅，其中 $M\in\mathbf{M}^2_{0,loc}$, $A\in\mathbf{V}^+\cap\mathbf{P}$, $E|X_0|<\infty$，若满足

(i) 对任何停时 σ, $E[|\triangle X_\sigma|I(\sigma<\infty)]<\infty$, $E[(\triangle M_\sigma)^2I(\sigma<\infty)]<\infty$;

(ii) $\{\sup_{t\ge0}X_t<\infty\}\cup\{\inf_{t\ge0}X_t>-\infty\}\subset\{A_\infty<\infty\}$,

则有

$$\{A_\infty+\langle M\rangle_\infty=\infty\}=\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t=-\infty\}\cap\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t=\infty\}\quad a.e. \tag{6}$$

证明 由定理1有

$$\{A_\infty+\alpha_\infty(M)<\infty\}=\{\underline{\lim}_{t\to\infty}X_t>-\infty\}\cup\{\overline{\lim}_{t\to\infty}X_t<\infty\}\quad a.e.$$

又因为对任何停时 σ,

$$E[|\triangle M_\sigma| I(\sigma<\infty)] \leq E[(\triangle M_\sigma)^2 I(\sigma<\infty)]<\infty,$$

由文献[5]中的定理3有

$$\{a_\infty(M)<\infty\} = \{[M,M]_\infty<\infty\} = \{\langle M\rangle_\infty<\infty\} \quad \text{a. e.}$$

由此即知(6)式成立.

推论1 设 $X = \{X_n, \mathbf{F}_n, n\in N\}$ 为下鞅, 其Doob分解为 $X_n = X_0 + M_n + A_n, n\geq 1$, 其中 M 为零初值鞅, A 为零初值可预报增序列, 若满足:

(i) $E[\sup\limits_{n\geq 1}|X_n - X_{n-1}|]<\infty, E[\sup\limits_{n\geq 1}(M_n - M_{n-1})^2]<\infty$;

(ii) $\{\sup\limits_{n\geq 1}X_n<\infty\}\cup\{\inf\limits_{n\geq 1}X_n>-\infty\}\subset\{A_\infty<\infty\}$,

则有

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}E((M_n-M_{n-1})^2/\mathbf{F}_{n-1})+A_\infty=\infty\}=\{\varliminf_{t\to\infty}X_t=-\infty\}\cap\{\varlimsup_{t\to\infty}X_t=\infty\} \quad \text{a. e.} \tag{7}$$

注1° 定理1和定理2及推论1是关于局部(平方可积)鞅相应结果的一个合适推广. 若令 $A\equiv 0$, 条件(ii)自然满足, 即得定理A及其推论.

2° 本文的结论是对特殊半鞅局部收敛性有关结论的一个有意义的补充.

3° 条件(ii)是合理的, 它所明只要保证当 A 趋于无穷大时 X 仍能在 $(-\infty, +\infty)$ 间振荡, 这类特殊半鞅也具有这一局部性质.

致谢 作者衷心感谢胡迪鹤教授的指导.

参 考 文 献

[1] Liptser R S, Shiryaev A N. *Martingale Theory* (*in Russian*) [M]. Moscow, Nauka, 1986.

[2] Kabanov Ju M, Liptser R S, Shiryaev A N. *Absolute continuity and singularity of local absolute continuous probability distributions* [J]. Math. Sbornik., 1979, **108**: 32- 61.

[3] Shiryaev A N. *Probability* (*in Russian*) [M]. Moscow, Nauka, 1989.

[4] 何声武, 汪嘉冈, 严加安. 半鞅与随机积分 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] 任耀峰. Lenglart不等式与特殊半鞅的收敛集 [J]. 数学杂志, 1994, **14**: 523- 528.

A Local Property of Special Semimartingales

Ren Yaofeng

(Dept. of Math., The Naval Academic Institute of Engineering of China, Wuhan 430033)

Liang Hanying

(Dept. of Appl. Math., Tongji University, Shanhai 200092)

Abstract

In this paper we study a local property of special semimartingales and obtain some extensions.

Keywords local martingale, special semimartingale, local property.