第19卷第2期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 19 No. 2
1999年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1999

关于含m-增生算子的非线性方程的迭代过程的几点注记*

周海云　　　　骆舒心
(军械工程学院基础部, 石家庄050003)　(河北科技大学基础部, 石家庄050018)

摘　要: 本文指出文[1, 2, 3]所引入的迭代方法实际上就是Mann 型迭代和 Ishikawa 型迭代方法, 而相应结果只不过是已有结果的简单推论

关键词: m-增生算子, Mann 迭代方法, Ishikawa 迭代方法
分类号: AMS(1991) 47H17/CLC O177. 91
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)02-0471-04

设X 为实Banach 空间, X^* 为其共轭空间. 正规对偶映象$J: X \to 2^{X^*}$ 定义为$Jx = \{f \in X^*, \langle x, f\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$, 其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示广义共轭对. 若$X^*$ 为严格凸的, 则J 是单值的且$J(-x) = -Jx$, $J(tx) = tJx$, $t \geq 0$. 若X^* 为一致凸的, 则J 在X 的有界子集上是一致连续的[4]. 分别用$D(T)$, $R(T)$表示算子T 的定义域和值域, 用j 表示单位的正规对偶映象.

算子$T: D(T) \subset X \to X$ 称为增生的, 如果$\forall x, y \in D(T)$, 相应地有$j \in J(x-y)$使

$$\langle Tx - Ty, j\rangle \geq 0; \tag{1}$$

增生算子T 称为m-增生的, 如果$\forall \lambda > 0$, $R(T+\lambda I) = X$.

设$T: D(T) \subset X \to X$ 为m-增生的, 则$\forall f \in X$, 方程$x + Tx = f$ 有唯一解.

最近, [1], [2]以及[3]分别研究了含m-增生算子的非线性方程的解的迭代问题. 他们试图就T 的定义域$D(T)$为X 的真子集的情形来证明所引入的迭代格式的收敛性. 不幸的是, 所使用的投影算子恰好是恒等算子, 而所引入的迭代格式正是通常的Mann 型迭代格式和Ishikawa 型迭代格式. 因此所得的结果大部分实际上是已有结果的重述和简单推论, 都使用了[5]的一个结果.

定理1　设X 为一致凸和一致光滑的Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 为m-增生算子, 则$\forall x \in X$, $\lim_{r\to 0} J_r x$ 存在, 记之为Qx, 则$Q: X \to \overline{D(T)}$为非扩展收缩, 其中$J_r = (I + rT)^{-1}$.

当$T: D(T) \subset X \to X$ 为有界m-增生算子时, 可以证明上述投影算子Q 就是恒等算子. 事实上, 有更强的结果.

定理2　设X 为实Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 为有界m-增生算子. 令$J_r = (I + rT)^{-1}$. 则$\overline{D(T)} = X$, $Q = I$.

证明　设$x \in X$ 任意给定, 要证$x \in \overline{D(T)}$. 由$J_r x = (I + rT)^{-1} x$ 得

$$J_r x + rTJ_r x = x, \quad \forall r > 0. \tag{2}$$

* 收稿日期: 1997-10-13

取定 $x_0\in D(T)$, 则 $J_r x_0\to x_0(r\to 0)$. 因 $J_r: X\to D(T)$ 为非扩展算子, 故

$$\|J_r x - J_r x_0\| \leq \|x - x_0\| \tag{3}$$

从而对充分小的 $r>0$, 有 $\|J_r x\|\leq\|x - x_0\| + \|J_r x_0\|\leq\|x\| + 3\|x_0\|\overset{\triangle}{=} M$, 此即

$$\sup_{r>0}\{\|J_r x\|: r>0\text{充分小}\}\leq M.$$

由假设 T 为有界算子知, $\{TJ_r x\}$ 关于充分小的 $r>0$ 为有界序列, 故 $rTJ_r x\to 0(r\to 0)$. 由(2)得 $J_r x\to x(r\to 0)$, 即 $x\in\overline{D(T)}$, $Qx = \lim\limits_{r\to 0} J_r x = x$. □

从[6]中的定理1可以推得下述结果

定理3　设 X 为实一致光滑 Banach 空间, $T: X\to X$ 为 m-增生算子, 且 $R(T)$ 有界, 设 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $(0, 1]$ 中实数列满足(i) $c_n\to 0(n\to\infty)$; (ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$(或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(1 - c_n) = \infty$). $\forall f\in X$, 定义 $S: X\to X$, $Sx = f - Tx$. 则 Mann 型迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$(\mathrm{M})\quad\begin{cases} x_0\in X \\ x_{n+1} = (1 - c_n)x_n + c_n S x_n, \quad n\geq 0\end{cases}$$

强收敛于方程 $x + Tx = f$ 的唯一解

证明　因 $T: X\to X$ 为 m-增生算子, 故方程 $x + Tx = f$ 有唯一解, 记为 x^*. 从而 x^* 是 S 的唯一不动点, 故 $\mathrm{Fix}(S) = \{x^*\}\neq\varnothing$. 因 T 为增生算子, 故 $\forall x, y\in X$, 存在 $j\in J(x - y)$ 使得

$$\langle Tx - Ty, j\rangle\geq 0. \tag{4}$$

从而 $\forall x, y\in X$, 存在 $j\in J(x - y)$ 使得

$$\langle Sx - Sy, j\rangle = -\langle Tx - Ty, j\rangle\leq 0. \tag{5}$$

(5)式表明 $S: X\to X$ 为严格伪压缩算子.

由假设 $R(T)$ 为有界集, 故 $R(S)$ 为有界集 由[6]中的定理1知, $x_n\to x^*(n\to\infty)$.

断言1　[1]中的定理3是定理3的推论

证明　因[1]中的定理3假设 $D(T)$ 为闭的, $R(T)$ 为有界集 故由定理2知 $D(T) = X$, $Q = I$. 从而[1]中的定理3使用的迭代格式

$$\begin{cases} x_{n+1} = Qp_n \\ p_n = (1 - c_n)x_n + c_n S x_n, n\geq 0 \\ x_0\in D(T)\end{cases}$$

变为

$$(\mathrm{M})\quad\begin{cases} x_0\in X, \\ x_{n+1} = (1 - c_n)x_n + c_n S x_n, n\geq 0,\end{cases}$$

其中 $c_n = (0, 1]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$, $c_n\to 0(n\to\infty)$.

由定理3知, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 $x + Tx = f$ 的唯一解 □

断言2　[2]中的定理5, 定理6是定理3的推论

证明　同断言1之证明, 略 □

事实上, K. K. Tan 和 H. K. Xu[7, Theorem 4.1]已经证明了下述结果

定理4　设 X 为 p-一致光滑 Banach 空间, $p>1$, $T: X\to X$ 为 Lipschitzian 强增生算子. 定

义 $S: X \to X$, $Sx = f - Tx + x$. 设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[0, 1]$ 中两个数列满足: (i) $\lim_n \alpha_n = \lim_n \beta_n = 0$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, 则对任意初值 $x_0 \in X$, Ishikawa 序列 $\{x_n\}$:

$$(\mathrm{IS})\quad \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

强收敛于方程 $Tx = f$ 的唯一解.

从定理4易得下述结果.

定理5 设 X 为 p-一致光滑Banach空间, $p > 1$, $T: X \to X$ 为Lipschitzian m-增生算子. 定义 $S: X \to X$, $Sx = f - Tx$. 设 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 如定理4所述, 则 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$$(\mathrm{IS})'\quad \begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S x_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

强收敛于方程 $x + Tx = f$ 的唯一解.

证明 只需注意 $Sx = f - (x + Tx) + x$, 而 $I + T$ 为强增生算子. □

断言3 [2]中的定理3, 定理4是定理5的推论或重述.

证明 显然[2]中定理4是定理5的重述. 下面证明[2]中的定理3是定理5的简单推论.

由[2]中定理3的假设 $T: D(T) \subset X \to X$ 为Lipschitz m-增生算子, 故 T 为有界 m-增生算子. 由定理2知, $\overline{D(T)} = X$, $Q = I$. 因[2, Theorem 3]也假设 $D(T)$ 是闭的, 故 $D(T) = X$. 因此, [2, Theorem 3]所使用的迭代格式:

$$p_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(f - TQy_n), \quad n \geq 0,$$
$$y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n), \quad n \geq 0,$$
$$x_n = Qp_{n-1}, n \geq 1, \quad x_0 \in D(T) = X,$$

实际上是通常的 Ishikawa 型迭代格式

$$(\mathrm{IS})''\quad \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(f - Ty_n), \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n), \quad n \geq 0, \\ x_0 \in X. \end{cases}$$

依定理5知, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于方程 $Tx + x = f$ 的唯一解. □

断言4 [2]中的定理7是其[2, Theorem 8]的推论, 而其[2, Theorem 8]是定理5的简单推论.

证明 只需注意 T 为 m-耗散当且仅当 $-T$ 为 m-增生. □

断言5 [3]中的定理3.1是其定理3.2的推论, 而[3, Theorem 3.3]是其定理3.4的推论.

证明 类似于断言3, 4之讨论. 从略. □

由以上讨论可知, 含 m-增生算子的非线性方程解的迭代逼近问题当 $D(T)$ 为 X 一个真子集时并未真正解决. 最近, 我们研究了这个问题, 将在另文给出.

参 考 文 献

[1] Zhu L. *Iterative solution of nonlinear equations involving m-accretive operators in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **188**: 410-415.

[2] Chidume C E and Osilike M O. *Approximation methods for nonlinear operator equations of m-accretive type* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **189**: 225-239.

[3] Ding X P. *Iterative process with errors of nonlinear equations involving m-accretive operators* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **209**: 191-201.

[4] Barbu V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces* [M]. Noordhoff, Leyden, 1976.

[5] Reich S. *Strongly convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1980, **75**: 287-292.

[6] Weng X L. *Fixed point iteration for local strictly pseudocontractive mapping* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1991, **113**: 727-731.

[7] Tan K K and Xu H K. *Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, **178**: 9-21.

[8] Zhou H Y and Jia Y T. *Approximating the zeros of accretive operators by the Ishikawa iteration process* [J]. Abst. Appl. Anal., 1996, **1**: 153-167.

[9] Zhou H Y. *A remark on Ishikawa iteration* [J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**: 631-633.

[10] **周海云. 一致平滑Banach空间中一类非线性算子的Ishikawa迭代序列的收敛定理** [J]. **数学学报**, 1997, **40**: 751-758

Remarks on the Iterative Process with Errors of Nonlinear Equations Involving m-Accretive Operators

Zhou Haiyun

(Dept. of Basic Science, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003)

Luo Shuxin

(Dept. of Basic Science, Hebei Tech. & Sci. University, Shijiazhuang 050018)

Abstract

In the present note we find that the iterative methods introduced in papers [1-3] are equivalent to the Mann type iterative method and the Ishikawa type iterative method, while the results therein are not new.

Keywords m-accretive operator, Mann iteration, Ishikawa iteration.