第19卷第3期
1999年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 19 No. 3
Aug. 1999

关于隐补问题的两个结果*

郭伟平
(齐齐哈尔大学师范学院数学系，黑龙江 161006)

摘　要：本文在 Banach 空间中证明了隐补问题解的存在性定理.

关键词：Banach 空间；隐补问题；共轭锥.
分类号：AMS(1991) 49R20/CLC O177.3
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0554-03

1 引　言

在相补问题中，隐补问题是较为困难的问题. 因此，讨论隐补问题往往局限于 Hilbert 空间[1,2]. 这在一定程度上限制了这一理论的应用与发展，正因为如此，人们自然希望能将这一工作推广到 Banach 空间. 最近[3]在自反 Banach 空间中证明了一个隐补问题解的存在性定理，本文应用集值不动点的方法，研究了 Banach 空间中的隐补问题.

2 预备知识

本文总假定 E 是实 Banach 空间，E^* 表 E 的共轭空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 E^* 与 E 的配对，设 $P\subset E$ 为一凸锥，P^* 表 P 的共轭锥，即 $P^*=\{f\in E^*:\langle f,x\rangle\geqslant 0,\forall\, x\in P\}$.

设 $T:P\to E^*$，$g:P\to P$ 为非线性算子，所谓的隐补问题是求一点 $\bar{x}\in P$，使得

$$T(\bar{x})\in P^*\text{ 且 }\langle T(\bar{x}),g(\bar{x})\rangle=0$$

为证本文的主要结果，需要下面引理

引理[4]　设 (X,D,Γ) 是 H-空间，$S:D\to 2^X$，$T:X\to 2^X$ 满足条件：

(1)　$\forall\, x\in D$，$Sx\subset Tx$ 且 Sx 是紧开集；

(2)　$\forall\, y\in X$，$T^{-1}y$ 是 H-凸的；

(3)　存在非空紧集 $K\subset X$，对于 D 中任意有限集 N，存在 X 的一个紧 H-子空间 $L_N\supset N$ 使得

$$L_N\setminus K\subset S(L_N\cap D),$$

---

* **收稿日期**：1996-06-11；**修订日期**：1998-01-05
基金项目：黑龙江自然科学基金(A9619)资助项目
作者简介：郭伟平(1954-)，男，辽宁西丰县人，齐齐哈尔大学师范学院教授.

则或存在 $y\in K$ 使得 $S^{-1}y_0=\varnothing$，或存在 $x_0\in X$ 使得 $x_0\in Tx_0$.

3 主要结果

定理 1 设 E 为 Banach 空间，$P\subset E$ 为闭凸锥，设 $T:P\to E^*$ 是非线性算子，$g:P\to P$ 是正齐次满的仿射算子，满足条件：

(1) 对任意网 $\{x_\alpha\}\subset P$，当 $x_\alpha\xrightarrow{弱}x$ 时，有 $g(x_\alpha)\xrightarrow{弱}g(x)$ 且 $T(x_\alpha)\xrightarrow{\|\cdot\|}T(x)$；

(2) 存在非空弱紧集 $\Omega\subset P$，$\forall\, x\in P\setminus\Omega$，有 $y\in\Omega$ 使得

$$\langle T(x),g(x)-g(y)\rangle>0,$$

则存在 $\bar{x}\in P$ 使得 $T(\bar{x})\in P^*$ 且 $\langle T(\bar{x}),g(\bar{x})\rangle=0$.

证明 对任意有限集 $A\subset E$，令 $\Gamma_A=\mathrm{co}A$（$\mathrm{co}A$ 表 A 的凸包），则易知 $(E,\{\Gamma_A\})$ 按 E 中弱拓扑是 H-空间，P 为 H-凸集，从而 $(P,\{\Gamma_A\})=(P,\{\Gamma_A\cap P\})$ 也是 H-空间.

定义集值映象 $S:P\to 2^P$ 如下：$S(y)=\{x\in P:\langle T(x),g(x)-g(y)\rangle>0\}$，$\forall\, y\in P$.

现在证明 $\forall\, y\in P$，$S(y)$ 按 P 中弱拓扑是开集，自然是紧开集，为此，只须证

$$P\setminus S(y)=\{x\in P:\langle T(x),g(x)-g(y)\rangle\leqslant 0\},\ \forall\, y\in P$$

是 P 中弱闭集.

设任意网 $\{x_\alpha\}\subset P$，且 $x_\alpha\xrightarrow{弱}x_0$，由 P 是 Banach 空间中的闭凸集，可知 P 为弱闭集，故 $x_0\in P$，由条件(1)及一致有界性定理，有

$$\begin{aligned}&|\langle T(x_\alpha),g(x_\alpha)-g(y)\rangle-\langle T(x_0),g(x_0)-g(y)\rangle|\\ &\leqslant|\langle T(x_\alpha)-T(x_0),g(x_\alpha)-g(y)\rangle|+|\langle T(x_0),g(x_\alpha)-g(x_0)\rangle|\\ &\leqslant\|T(x_\alpha)-T(x_0)\|\cdot\sup_\alpha\|g(x_\alpha)-g(y)\|+|\langle T(x_0),g(x_\alpha)-g(x_0)\rangle|\to 0\end{aligned}$$

故 $\forall\, y\in P$，实值函数 $x\mapsto\langle T(x),g(x)-g(y)\rangle$ 是弱连续的. 因此弱下半连续. 故 $P\setminus S(y)$ 是非空弱闭集.

取 $\hat{x}\in P\setminus\Omega$，对任意有限集 $A\subset P$，记 $L_A=\overline{\mathrm{co}}(\{\hat{x}\}\cup A\cup\Omega)$，由条件(2)，$\Omega$ 为弱紧集，故 $\{\hat{x}\}\cup A\cup\Omega$ 也是弱紧集. 据 Krein-Milman 定理知 L_A 是包含 A 的弱紧的凸集. 故 L_A 是弱紧的 H-凸集. 因此 L_A 是 P 中弱紧的 H-子空间，显然 $L_A\setminus\Omega\neq\varnothing$. 设 $x\in L_A\setminus\Omega$，则 $x\in P\setminus\Omega$. 据条件(2)知存在 $y\in\Omega$ 使得 $\langle T(x),g(x)-g(y)\rangle>0$，于是 $x\in S(y)$. 这表明

$$L_A\setminus\Omega\subset\bigcup_{y\in\Omega}S(y)\subset\bigcup_{y\in L_A}S(y)=S(L_A\cap P).$$

下面证 $S^{-1}(x)$ 是 H-凸集，假设 $\forall\, x\in P$，

$$S^{-1}(x)=\{y\in P:\langle T(x),g(x)-g(y)\rangle>0\}\neq\varnothing,$$

设 $y_1,y_2\in S^{-1}(x)$，$\alpha\in[0,1]$，注意到 g 是仿射算子，有

$$\begin{aligned}&\langle T(x),g(x)-g[\alpha y_1+(1-\alpha)y_2]\rangle\\ &=\langle T(x),g(x)-[\alpha g(y_1)+(1-\alpha)g(y_2)]\rangle\\ &=\alpha\langle T(x),g(x)-g(y_1)\rangle+(1-\alpha)\langle T(x),g(x)-g(y_2)\rangle>0\end{aligned}$$

可见 $S^{-1}(x)$ 是非空凸集，因而是非空 H-凸集. 于引理中，令 $D=X$，$T=S$，可知必有 $x_0\in P$ 使得 $x_0\in S(x_0)$，即 $\langle T(x_0),g(x_0)-g(x_0)\rangle>0$，这显然矛盾. 故必有 $\bar{x}\in\Omega\subset P$，使得 $S^{-1}(\bar{x})=$

$\varnothing$，从而$\langle T(\bar{x}), g(y)-g(\bar{x})\rangle \geqslant 0, \ \forall y \in P$.

再由 g 是正齐次算子，令 $y=2\bar{x}$，有

$$\langle T(\bar{x}), g(\bar{x})\rangle = \langle T(\bar{x}), g(2\bar{x})-g(\bar{x})\rangle \geqslant 0.$$

再令 $y=\frac{1}{2}\bar{x}$，有

$$\langle T(\bar{x}), g(\bar{x})\rangle = 2\langle T(\bar{x}), g(\bar{x})-g(\frac{1}{2}\bar{x})\rangle \leqslant 0.$$

从而$\langle T(\bar{x}), g(\bar{x})\rangle = 0$.

最后证 $T(\bar{x}) \in P^*$，若不然，存在 $y_* \in P$ 使得$\langle T(\bar{x}), y_*\rangle < 0$，由 g 是满映象，可知有 $\bar{y} \in P$ 使得 $g(\bar{y})=y_*$，于是

$$0 \leqslant \langle T(\bar{x}), g(\bar{y})-g(\bar{x})\rangle = \langle T(\bar{x}), g(\bar{y})\rangle - \langle T(\bar{x}), g(\bar{x})\rangle = \langle T(\bar{x}), y_*\rangle < 0$$

矛盾，故 $T(\bar{x}) \in P^*$. 当 E 是自反 Banach 空间时，定理 1 中的弱紧性可以改进.

定理 2 设 E 是自反 Banach 空间，$P \subset E$ 为闭凸锥. 设 $T: P \to E^*$ 是非线性算子，$g: P \to P$ 是正齐次满的仿射算子，满足定理 1 中的条件(1)，再设存在 $y_0 \in P$ 使得

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in P}} \langle T(x), g(x)-g(y_0)\rangle > 0.$$

则存在 $\bar{x} \in P$，使得 $T(\bar{x}) \in P^*$ 且$\langle T(\bar{x}), g(\bar{x})\rangle = 0$.

证明 由条件 $\lim\limits_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in P}} \langle T(x), g(x)-g(y_0)\rangle > 0$ 知存在充分大的数 $\beta > \|y_0\|$ 使得

$$\langle T(x), g(x)-g(y_0)\rangle > 0, \ \forall x \in P, \|x\| > \beta$$

令 $\Omega = \{x \in P: \|x\| \leqslant \beta\}$，易知 Ω 是自反 Banach 空间中的有界闭凸集，故为弱紧集. $\forall x \in P \backslash \Omega$，有 $y_0 \in \Omega$ 使$\langle T(x), g(x)-g(y_0)\rangle > 0$. 再据定理 1 知本结果成立.

参 考 文 献

[1] Chang Shih-sen, Huang N J. *Generalized multivalued implict complementarity problems in Hilbert spaces* [J]. Math Japonica, 1991, **36**(6): 1093—1100.

[2] Isac G. *On the implicit complementarity problem in Hilbert spaces* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1985, **32**: 251—260.

[3] 张石生，李建. Banach 空间中的相补问题 [J]. 高校应用数学学报，1994, **9**(1): 75—83.

[4] Park S. *On minimax inequalities on spaces having certain contractible subsets* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1993, **47**: 25—40.

Two Results for the Implicit Complementarity Problems

GUO Wei-ping

(Dept. of Math., Teachers' College, Qiqihar Univ., 161006)

Abstract: The purpose of this paper is to prove the existence theorems of solutions for the implicit complementarity problems in Banach spaces.

Key words: Banach space; implicit complementarity problem; conjugate cone.