第19卷第3期
1999年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 19 No. 3
Aug. 1999

几乎优越扩张与同调维数*

刘仲奎[1]， 赵志新[2]
1. 西北师范大学数学系，兰州 730070；
2. 江苏石油化工学院基础部，常州 213016

摘 要：设环 S 是环 R 的几乎优越扩张. 本文证明了 R 和 S 具有相同的 f. f. p. 维数以及 finitistic 维数. 若 M_S 是右 S-模，则 $\mathrm{FP\text{-}id}(M_S)=\mathrm{FP\text{-}id}(M_R)$. 若 G 是有限群，R 是 G 分次环且 $|G|^{-1}\in R$，则 Smash 积 $R\#G^*$ 和 R 具有相同的 f. f. p. 维数，finitistic 维数，以及 FP- 整体维数.

关键词：几乎优越扩张；f. f. p. 维数；finitistic 维数；FP- 内射维数.
分类号：AMS(1991) 16S99/CLC O153.3
文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0557-06

1 引 言

优越扩张是环的一类重要扩张，它包括了环 R 上的全矩阵环([1])，以及环 R 与有限群 G 当 $|G|^{-1}\in R$ 时的斜群环 $R*G$([2]). [1] 和[3] 中给出了优越扩张的其它例子. 关于优越扩张的研究已出现了许多重要成果(参见[3—5]). [6]，[7] 中引入并研究了优越扩张的一种推广即几乎优越扩张. 设 R 是环 S 是子环，且 R 和 S 具有相同的单位元. 称 S 是 R 的几乎优越扩张，如果下述条件(1)，(2) 成立：

(1) 存在 S 的有限子集合 $\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$，使得 $S=s_1R+\cdots+s_nR$，$s_iR=Rs_i$，$i=1,2,\cdots,n$，并且 S_R 是投射右 R-模，${}_RS$ 是平坦左 R-模；

(2) 设 $N_S\leqslant M_S$，则由 $N_R|M_R$ 可以推出 $N_S|M_S$. 这里 $N|M$ 表示 N 是 M 的直和因子.

若 S 满足条件(2) 以及如下的条件(3)，则称 S 为 R 的优越扩张：

(3) 存在 S 的有限子集合 $\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$，使得 $s_1=1$，$S=s_1R+\cdots+s_nR$，$s_iR=Rs_i$，$i=1,2,\cdots,n$，并且 S 是以 $s_1,\cdots,s_n$ 为基的自由左和右 R-模.

[6] 中给出了是几乎优越扩张但不是优越扩张的例子. [5] 中证明了若 S 是 R 的优越扩张，则 S 和 R 有相同的右整体维数及弱整体维数. [5] 中证明了若 S 是 R 的几乎优越扩张，则 S 的右整体维数(弱整体维数) 不超过 R 的右整体维数(弱整体维数). 本文中我们考虑环的 f. f. p. 维数([3])，finitistic 维数，以及 FP- 内射维数. 我们证明了若 S 是 R 的几乎优越扩张，则

* 收稿日期：1996-07-15
基金项目：国家自然科学基金(19501007)资助项目；甘肃省青年基金(ZQ-96-01)资助项目
作者简介：刘仲奎(1963-)，男，甘肃通渭人，博士，西北师范大学数学系教授.

S 和 R 有相同的 f.f.p. 维数以及相同的 finitistic 维数，并给出例子说明当"几乎优越扩张"减弱为"有限正规扩张"时上述结论不再成立. 对于右 S-模 M_S，我们证明了 $\text{FP-id}(M_S)=\text{FP-id}(M_R)$. 从而有 $\text{FP-}D(S)\leqslant\text{FP-}D(R)$. 作为上述结果的应用，还考虑了环 R 与有限群 G 的 Smash 积 $R\#G^*$ 的 f.f.p. 维数，finitistic 维数以及 FP-内射维数.

未加解释的记号均同[9].

2 f.f.p. 维数及 finitistic 维数

引理 2.1[7] 设 S 是 R 的几乎优越扩张，M_S 是右 S-模，则 $\text{pd}(M_S)=\text{pd}(M_R)$.

设 R 是环. 据[8]，R 的右 f.f.p. 维数定义为：

$$\text{r.f.f.p.}D(R)=\sup\{\text{pd}(N)\mid N\text{ 是有限表示右 }R\text{-模且 }\text{pd}(N)<\infty\}.$$

关于 $\text{r.f.f.p.}D(R)$ 的讨论可见[8].

定理 2.2 设 S 是 R 的几乎优越扩张，则有：

$$\text{r.f.f.p.}D(R)=\text{r.f.f.p.}D(S).$$

证明 设 $\text{r.f.f.p.}D(R)=m<\infty$. 假定 N 是有限表示右 S-模，则有正合序列：

$$0\to K_S\to P_S\to N\to 0,$$

其中 P_S 是有限生成投射模，K_S 是有限生成模. 设 $K_S=x_1S+\cdots+x_tS$，则 $\{x_is_j\mid i=1,\cdots,t,j=1,\cdots,n\}$ 是右 R-模 K_R 的生成集，所以 K_R 是有限生成右 R-模. 同理可证 P_R 也是有限生成右 R-模. 由引理 2.1 知 P_R 还是投射的. 所以由正合序列 $0\to K_R\to P_R\to N_R\to 0$ 即知 N_R 是有限表示的. 如果 $\text{pd}(N_S)<\infty$，则由引理 2.1，$\text{pd}(N_R)<\infty$. 所以由 r.f.f.p. 维数的定义即知 $\text{pd}(N_R)\leqslant\text{r.f.f.p.}D(R)=m$. 再由引理 2.1 知 $\text{pd}(N_S)=\text{pd}(N_R)\leqslant m$. 所以有

$$\text{r.f.f.p.}D(S)\leqslant m.$$

若 $\text{r.f.f.p.}D(R)=\infty$，则自然地有 $\text{r.f.f.p.}D(S)\leqslant\text{r.f.f.p.}D(R)$.

反过来，假设 $\text{r.f.f.p.}D(S)=m<\infty$. 设 M 是有限表示右 R-模且 $\text{pd}(M_R)<\infty$，则有右 R-模正合序列：

$$0\to K\to P\to M\to 0,$$

其中 P 是有限生成投射右 R-模，K 是有限生成模. 因为 ${}_RS$ 是平坦左 R-模，所以有正合序列：

$$0\to K\otimes S\to P\otimes S\to M\otimes S\to 0.$$

因为函子 $-\otimes S:\text{Mod-}R\to\text{Mod-}S$ 保持投射性，所以 $P\otimes S$ 为投射右 S-模. 设 $\{a_1,\cdots,a_t\}$ 是 P_R 的生成集则容易证明 $\{a_1\otimes 1,\cdots,a_t\otimes 1\}$ 是右 S-模 $P\otimes S$ 的生成集，所以 $P\otimes S$ 是有限生成的. 同理可以证明 $K\otimes S$ 是有限生成的. 所以 $M\otimes S$ 是有限表示右 S-模. 因为 ${}_RS$ 是平坦的且 $\text{pd}(M_R)<\infty$，所以由[10，推论 3.4]知 $\text{pd}(M\otimes S_S)=\text{pd}(M_R)<\infty$. 从而由定义即知有

$$\text{pd}(M\otimes S_S)\leqslant m.$$

所以 $\text{pd}(M_R)=\text{pd}(M\otimes S_S)\leqslant m$. 因此 $\text{r.f.f.p.}D(R)\leqslant m$.

若 $\text{r.f.f.p.}D(S)=\infty$，则显然有 $\text{r.f.f.p.}D(R)\leqslant\text{r.f.f.p.}D(S)$. 因此就证明了 $\text{r.f.f.p.}D(R)=\text{r.f.f.p.}D(S)$.

环 R 的 finitistic 维数定义为：

$$\text{r.fp}D(R)=\sup\{\text{pd}(M_R)\mid M\text{ 是有限生成右 }R\text{-模且 }\text{pd}(M_R)<\infty\}.$$

关于 r. fp$D(R)$ 的讨论可见[11,12]. 和定理 2.2 的证明类似地可以证明

定理 2.3　设 S 是 R 的几乎优越扩张，则有

$$\mathrm{r.fp}D(S)=\mathrm{r.fp}D(R).$$

称环 S 是 R 的自由有限正规扩张，如果 $R\leqslant S$，S 和 R 有相同的单位元，且存在 S 的有限子集合 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ 使得 S 是以 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ 为基的自由左和右 R-模且 $s_iR=Rs_i$，$i=1,\cdots,n$. 下面的例子说明定理 2.2 和 2.3 中的条件"S 是 R 的几乎优越扩张"不能改为"S 是 R 的自由有限正规扩张".

例 2.4　令 $R=\mathbf{Z}_2$，$S=\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_2 & 0\\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2\end{pmatrix}$. 容易证明 S 是自由左和右 R-模，其自由基为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

把 R 同构于环$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$，则易知 S 是 R 的自由有限正规扩张. 显然 r. f. f. p. $D(R)=$ r. fp$D(R)=0$.

由[13,定理 4]知 S 的右整体维数 r$D(S)=1$. 所以每个循环有限表示右 S-模都有有限投射维数. 又 S 是右 Noether 环，所以由[8,命题 2.2]有 r. f. f. p. $D(S)=$ r$D(S)=1$. 显然还有 r. fp$D(S)=1$.

3　FP-内射维数

右 R-模 M 称为 FP-内射的([14])，如果对任意有限表示右 R-模 P，$\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$. M 的 FP-内射维数 FP-id$M$ 定义为：

$$\text{FP-id}M=\inf\{n\mid \text{对任意有限表示右 } R\text{-模 } P\text{，有 } \mathrm{Ext}_R^{n+1}(P,M)=0\}.$$

当上述 n 不存在时，规定 FP-id$M=\infty$. 显然，FP-id$M\leqslant$ id$M$. [7]中证明了若 S 是 R 的几乎优越扩张，M 是右 S-模，则 $\mathrm{id}(M_S)=\mathrm{id}(M_R)$. 对于 FP-内射维数有类似的结果. 为此先列出下面的引理.

引理 3.1([7],引理 1.1)　设 S 是 R 的环扩张，且满足条件(2). 若 M_S 是右 S-模，则 M_S 同构于 $\mathrm{Hom}_R(S,M)_S$ 的直和因子.

定理 3.2　设 S 是 R 的几乎优越扩张，M 是右 S-模，则 FP-id$(M_S)=$ FP-id(M_R).

证明　设 FP-id$(M_S)=\infty$，则自然有 FP-id$(M_R)\leqslant$ FP-id(M_S). 设 FP-id$(M_S)=m<\infty$. 因为 $_RS$ 是平坦左 R-模，所以对任意右 R-模 X，有自然同构：

$$\mathrm{Ext}_S^{m+1}(X\otimes_R S,M)\simeq \mathrm{Ext}_R^{m+1}(X,M).$$

若 X_R 是有限表示的，则类似于定理 2.2 的证明可知 $X\otimes_R S_S$ 也是有限表示的. 所以

$$\mathrm{Ext}_S^{m+1}(X\otimes_R S,M)=0,$$

从而 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(X,M)=0$. 这就证明了 FP-id$(M_R)\leqslant m$.

总之恒有 FP-id$(M_R)\leqslant$ FP-id(M_S).

反之，设 FP-id$(M_R)=m<\infty$. 因为 S_R 投射且 $_SS$ 平坦，故对任意右 S-模 X 恒有自然同构：

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(X,M)\simeq \mathrm{Ext}_R^{m+1}(X\bigotimes_S S,M)\simeq \mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,\mathrm{Hom}_R(S,M)).$$

若 X_S 是有限表示右 S- 模，则类似于定理 2.2 的证明可知，X_R 也是有限表示的. 所以 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(X,M)=0$. 从而 $\mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,\mathrm{Hom}_R(S,M))=0$. 由引理 3.1 知存在右 S- 模 Q_S，使得 $M_S\oplus Q_S\simeq \mathrm{Hom}_R(S,M)_S$，所以有

$$\mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,M)\oplus \mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,Q)\simeq \mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,\mathrm{Hom}_R(S,M))=0,$$

因此 $\mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,M)=0$. 所以 $\text{FP-id}(M_S)\leqslant m$.

若 $\text{FP-id}(M_R)=\infty$，则自然有 $\text{FP-id}(M_S)\leqslant \text{FP-id}(M_R)$. 这样就证明了

$$\text{FP-id}(M_R)=\text{FP-id}(M_S).$$

推论 3.3　设 S 是 R 的几乎优越扩张，M 是右 S- 模. 则 M_S 是FP- 内射的当且仅当 M_R 是FP- 内射的.

对于环 R，定义 R 的右 FP- 整体维数

$$\text{FP-}D(R)=\sup\{\text{FP-id}(M_R)\mid M\ \text{是右}\ R\text{- 模}\}.$$

显然有 $\text{FP-}D(R)\leqslant D(R)$，这里 $D(R)$ 表示 R 的右整体维数.

推论 3.4　设 S 是 R 的几乎优越扩张，则有 $\text{FP-}D(S)\leqslant \text{FP-}D(R)$. 若 $\text{FP-}D(R)<\infty$，则

$$\text{FP-}D(S)=\text{FP-}D(R).$$

证明　由定理 3.2 即得 $\text{FP-}D(S)\leqslant \text{FP-}D(R)$.

设 $\text{FP-}D(R)<\infty$，$\text{FP-}D(S)=m<\infty$. 则对任意右 S- 模 M_S，$\text{FP-id}(M_S)\leqslant m$. 所以对任意有限表示右 S- 模 A_S，

$$\mathrm{Ext}_S^{m+1}(A,M)=0.$$

这说明对任意有限表示右 S- 模 A，

$$\mathrm{pd}(A_S)\leqslant m.$$

所以由 r. f. f. p. $D(S)$ 的定义即知有 r. f. f. p. $D(S)\leqslant m$. 由定理 2.2 可知有

$$\text{r. f. f. p. } D(R)\leqslant m.$$

设 B 是任意有限表示右 R- 模. 因为 $\text{FP-}D(R)<\infty$，所以和上面的证明类似地可知 $\mathrm{pd}(B_R)<\infty$. 从而

$$\mathrm{pd}(B_R)\leqslant \text{r. f. f. p. } D(R)\leqslant m.$$

所以对任意右 R- 模 N，$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(B,N)=0$. 因为 B_R 是任意的有限表示右 R- 模，所以 $\text{FP-id}(N_R)\leqslant m$. 因此由 N_R 的任意性即知 $\text{FP-}D(R)\leqslant m=\text{FP-}D(S)$. 这就证明了 $\text{FP-}D(S)=\text{FP-}D(R)$.

定理 3.5　设 S 是 R 的优越扩张，则

$$\text{FP-}D(S)=\text{FP-}D(R).$$

证明　因为优越扩张一定是几乎优越扩张，所以由定理 3.2 即知 $\text{FP-}D(S)\leqslant \text{FP-}D(R)$.

若 $\text{FP-}D(S)=\infty$，则自然有 $\text{FP-}D(R)\leqslant \text{FP-}D(S)$.

设 $\text{FP-}D(S)=m<\infty$. 则对任意右 R- 模 M 和任意右 S- 模 X 有自然同构：

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(X\bigotimes_S S,M)\simeq \mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,\mathrm{Hom}_R(S,M)).$$

因为 $\text{FP-id}(\mathrm{Hom}_R(S,M)_S)\leqslant \text{FP-}D(S)=m$，所以对任意有限表示右 S- 模 X，$\mathrm{Ext}_S^{m+1}(X,\mathrm{Hom}_R(S,M))=0$，因此 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(X,M)=0$，这里 X 是任意有限表示右 S- 模.

设 Y 是有限表示右 R-模. 和定理 2.2 的证明类似地可知 $Y \bigotimes_R S$ 是有限表示右 S-模. 所以 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(Y \bigotimes_R S, M) = 0$. 因为 S 是 R 的优越扩张, 所以作为右 R-模, 有

$$Y \bigotimes_R S_R = Y \bigotimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} R s_i) \simeq Y \bigotimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} R) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (Y \bigotimes_R R) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} Y.$$

因此,

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ext}_R^{m+1}(Y, M) \simeq \mathrm{Ext}_R^{m+1}(\bigoplus_{i+1}^{n} Y, M) \simeq \mathrm{Ext}_R^{m+1}(Y \bigotimes_R S, M) = 0.$$

所以 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(Y, M) = 0$. 这说明 FP-id$(M_R) \leqslant m$. 所以 FP-$D(R) \leqslant m$.

总之证明了 FP-$D(R) \leqslant$ FP-$D(S)$. 所以

$$\text{FP-}D(R) = \text{FP-}D(S).$$

4 Smash 积

设 G 是有限群, R 是 G-分次环. 在以 $\{p_a \mid a \in G\}$ 为基的自由左、右 R-模上定义如下乘法:

$$(rp_a)(sp_b) = rs_{ab^{-1}}p_b,$$

这里 $s_{ab^{-1}}$ 表示 s 的 ab^{-1} 分量. 这样所构成的环叫做环 R 与群 G 的 Smash 积, 记为 $R\#G^*$. 关于 Smash 积的讨论可见[15,16].

定理 4.1 设 G 是有限群, R 是 G-分次环, 且 G 的阶数 $|G|$ 满足 $|G|^{-1} \in R$. 则:

(1) r.f.f.p.$D(R\#G^*) =$ r.f.f.p.$D(R)$.

(2) r.fp$D(R\#G^*) =$ r.fp$D(R)$.

(3) FP-$D(R\#G^*) =$ FP-$D(R)$.

证明 定义 G 在 $R\#G^*$ 上的如下作用:

$$a(rp_b) = rp_{ba},$$

则可得到斜群环 $(R\#G^*) * G$. 由[15]或[16]可知有如下的环同构式:

$$(R\#G^*) * G \cong M_n(R),$$

这里 $M_n(R)$ 表示 R 上的 $n \times n$ 全矩阵环, 其中 $n = |G|$. 由[1],[2]知全矩阵环 $M_n(R)$ 以及斜群环 $(R\#G^*) * G$ (当 $|G|^{-1} \in R\#G^*$ 时) 分别是环 R 和 $R\#G^*$ 的优越扩张, 从而是几乎优越扩张, 所以由 $|G|^{-1} \in R$ 以及定理 2.2, 2.3, 3.5 即得结论.

参 考 文 献

[1] Passman D S. *The algebraic structure of group rings* [M]. Wiley-Interscience, New york, 1977.

[2] Passman D S. *It's essentially Maschke's theorem* [J]. Rocky Mountain J. Math., 1983, **13**: 37—54.

[3] Bonami L. *On the structure of Skew group rings* [C]. Algebra Berichte 48, Verlag Reinhard Fischer, Munchen, 1984.

[4] 刘仲奎. 环的 excellent 扩张 [J]. 数学学报, 1991, **34**(6): 818—824.

[5] Liu Zhongkui. *Excellent extensions and homological dimensions* [J]. Comm. Algebra, 1994, **22**(5): 1741—1745.

[6] Xue Weimin. *On a generalization of excellent extensions* [J]. Acta Math, Vietnam, 1994, **19**: 31—38.
[7] Xue Weimin. *On almost excellent extensions* [J]. Algebra Colloguim, 1996, **3**(2): 125—134.
[8] 丁南庆. f.f.p. 维数 [J]. 数学学报,1991, **34**(1): 40—47.
[9] Rotman J J. *An introduction to homological algebra* [M]. Academic Press, New York,1979.
[10] Shamsuddin A A. *Finite normalizing extensions* [J]. J. Algebra, 1992, **151**: 218—220.
[11] Wang Yong. *A note on the Finitistic dimension conjecture* [J]. Comm. Algebra, 1994, **22**(7): 2525—2528.
[12] Green E L, Kirkman E and Kuzmanovich J. *Finitistic dimensions of finite dimensional monomial algebras* [J]. J. Algebra, 1991, **136**: 37—50.
[13] Kirkman E and Kuzmanovich J. *On the global dimension of a ring modulo its nilpotent radical* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, **102**(1): 25—28.
[14] Stenstrom B. *Coherent rings and FP-injective modules* [J]. J. London Math. Soc., 1970, **2**: 323—329.
[15] Nastasescu C and Rodino N. *Localization on graded modules, relative Maschke's theorem and applications* [J]. Comm. Algebra, 1990, **18**(3): 811—832.
[16] Quinn D. *Group graded rings and duality* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1985, **292**: 154—167.

Almost Excellent Extensions and Homological Dimensions

LIU Zhong-kui[1], ZHAO Zhi-xin[2]

1. Northwest Normal University, Lanzhou 730070;
2. Jiangsu Inst. of Petroleum. Tecn., Changzhou 213016

Abstract: Let R be a ring and S an almost excellent extension of R. We prove that (i) r.f.f.p. $D(S)$ = r.f.f.p. $D(R)$, r.fp$D(S)$ = r.fp$D(R)$; and (ii) if M_S is a right S-module then the equality FP-id (M_S) = FP-id (M_R) holds. We also consider the smash product $R\#G^*$ and establish similar results.

Key words: almost excellent extension; f.f.p. dimension; finitistic dimension; FP-injective dimension.