右消去幺半群、左正则带和左正则型 A 幺半群*

郭小江[1]，　田振际[2]

1. 四川大学数学学院，成都 610064；
1. 云南大学数学系，昆明 650091；
2. 兰州铁道学院基础部，兰州 730070

摘　要：本文利用右消去幺半群，左正则带建立了真左正则型 A 幺半群. 在证明了任一左正则型 A 幺半群均有 P-覆盖后，给出 P-覆盖的结构.

关键词：右消去幺半群；左正则带；左正则型 A 幺半群；P-覆盖.
分类号：AMS(1991) 20M10/CLC O152.7
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0563-06

1 引　言

文中出现的符号和述语，如果未加说明，均参见[1,2,10].

称半群 S 是一左富足半群，如果 S 的每个 $\mathscr{R}^*$-类都含有幂等元. 对于以左正则带(即常满足 $ef=efe$ 和 $e^2=e$ 的半群)为幂等元集的左富足半群 S，S 的每个 $\mathscr{R}^*$-类 $R_a^*(a\in S)$ 仅含一幂等元，记为 a^+. 事实上，设 e,f 均为 S 的幂等元，且 $e,f\in R_a^*$. 显然，$e\mathscr{R}f$. 从而 $e=fe=fef=f$. 称左富足半群 S 是一左正则型 A 半群，如果 S 满足条件：(1)$E(S)$(S 的幂等元集)成 S 的一子左正则带，且(2)$(\forall a\in S)(\forall e\in E(S))ae=(ae)^+a$. 这是一类以左型-$A$ 半群(left type-A semigroup)[2]，逆半群(inverse semigroup)[10] 为子类的半群.

称半群 S 上的同余 ρ 为右消同余，如果 S/ρ 满足右消去律. 对于左正则型 A 幺半群都有极小右消同余，记为 σ. 称左正则型 A 幺半群 S 是一真左正则型 A 幺半群，如果 $\sigma\cap\mathscr{R}^*=\iota_S$，此处 ι_S 为 S 上的恒等关系. 对于这类半群的研究始于 1965 年，之后许多学者对各种类型的子类进行了研究[3-9]. 本文将以异于[3—9]的方法建立真左正则型 A 幺半群的结构.

McAlister[7] 中证明了任一逆半群均有真覆盖. 其后，Fountain[3] 中将这一结果推广至左型 A 幺半群类. 本文将证明任一左正则型 A 幺半群均有 P-覆盖，并刻划了这类覆盖.

2 真左正则型 A 幺半群

需要下面的引理.

* 收稿日期：1995-11-13
基金项目：国家教委博士点基金资助项目
作者简介：郭小江(1967-)，男，江西宜春人，博士，现为四川大学数学学院数学博士后流动站在站研究人员.

引理 2.1 令 S 为一左正则型 A 幺半群. 则关系

$$\{(a,b)\in S\times S:(\exists\ e,f\in E(S))ea=fb\}$$

是 S 上的极小右消同余.

证明 用 ρ 记引理中所述的关系. 显然, ρ 为 S 上的右同余. 令 $c\in S$. 则 $cea=cfb$. 由 S 的性质, $(ce)^{+}ca=(cf)^{+}cb$. 于是 $ca\rho cb$, 即 ρ 是 S 上的左同余. 从而 ρ 为 S 上的同余.

设 $a\rho\cdot c\rho=b\rho\cdot c\rho$. 那么存在 $g,h\in E(S)$ 使得 $gac=hbc$. 于是 $gac^{+}=hbc^{+}$. 进而, $g(ac^{+})^{+}a=h(bc^{+})^{+}b$. 从而 $a\rho=b\rho$. 故 S/ρ 满足右消去律, 即 ρ 为 S 上的右消同余.

令 σ 为任一右消同余. 设 $u,v\in S$ 且 $u\rho v$. 那么 $k,l\in E(S)$ 使得 $ku=lv$. 由 σ 为右消同余, $k\sigma=1\sigma=l\sigma$, 此处 1 为 S 的么元. 于是 $u\sigma=v\sigma$. 从而 $\rho\subseteq\sigma$. 故 ρ 为 S 上的极小右消同余. □

本节余下部分将给出真左正则型 A 幺半群的结构. 先介绍半群的 P-子直积.

令 I 为一半群, M 为一以 1 为么元的幺半群. 令 S 为 M 和 I 的子直积, 且 $\{1\}\times I\subseteq S$. 又作映射

$$\eta:S\to\mathscr{T}_l(I)(I\text{ 上的左变换半群}),(a,i)\to\eta(a,i);\ \eta(a,i):I\to I,j\to{}^{(a,i)}j.$$

它满足

(P_1) 若 $(1,i)\in S$, $j\in I$, 则 ${}^{(1,i)}j=ij$, 其中 ij 为 i,j 在 I 中的积;

(P_2) 若 $(a,i),(b,j)\in S$, 则 $(ab,{}^{(a,i)}j)\in S$ 且 $\eta(a,i)\eta(b,j)=\eta(ab,{}^{(a,i)}j)$, 其中 ab 为 a,b 在 M 中的积.

定义 2.2 在上述集合 S 上定义二元运算 $(a,i)(b,j)=(ab,{}^{(a,i)}j)$, 则易知 S 关于此运算成一半群. 称这一半群 S 为半群 M 和 I 的 P-子直积, 记为 $M\,Ⓟ_\eta I$. 显然 η 为半群 $S=M\,Ⓟ_\eta I$ 到半群 $\mathscr{T}_r(I)$ 的同态, 称 η 为 P-子直积 $M\,Ⓟ_\eta I$ 的结构同态.

下面是本节中的主要结果.

定理 2.3 幺半群 S 为一真左正则型 A 幺半群, 当且仅当存在右消去幺半群 M 和左正则带 I 使得关于集 P-子直积结构同态 η, $S\cong M\,Ⓟ_\eta I$.

我们将以一系列引理证明定理 2.3.

引理 2.4 令 I 为含有幺元的左正则带, M 为一以 1 为幺元的右消去幺半群. 则关于任一 P-子直积的结构同态 η, $M\,Ⓟ_\eta I$ 是一真左正则型 A 半群.

证明 下面分四步证明引理 2.4.

(1) 令 $(a,i)\in E(M\,Ⓟ_\eta I)$, 则 $(a,i)=(a^2,{}^{(a,i)}i)$. 从而 $a=a^2$. 于是 $a=1$. 反之, 易证 $(1,i)$ 为 $M\,Ⓟ_\eta I$ 的幂等元. 从而, $E(M\,Ⓟ_\eta I)=\{1\}\times I$. 由 (P_1), 知 $E(M\,Ⓟ_\eta I)$ 为 $M\,Ⓟ_\eta I$ 的子左正则带.

(2) 设 $(x,j),(y,k)\in(M\,Ⓟ_\eta I)^1$ 且 $(x,j)(a,i)=(y,k)(a,i)$. 那么 $(xz,{}^{(x,j)}i)=(ya,{}^{(y,k)}i)$. 于是 $xa=ya$ 且 ${}^{(x,j)}i={}^{(y,k)}i$. 进而, $x=y$. 从而

$$(x,j)(1,i)=(x,{}^{(x,j)}i)=(y,{}^{(y,k)}i)=(y,k)(1,i).$$

再结合 $(1,i)(a,i)=(a,i)$, 知 $(1,i)\mathscr{R}^*(a,i)$. 于是 $M\,Ⓟ_\eta I$ 为一左富足半群.

(3) 令 $(1,j)\in M\,Ⓟ_\eta I$, 则

$$\begin{aligned}(a,i)(1,j)&=(a,{}^{(a,i)}j)=(1,i)(a,i)(1,j)\\&=(1,i)(a,{}^{(a,i)}j)=(a,i\cdot{}^{(a,i)}j)\\&=(a,i\cdot{}^{(a,i)}j\cdot i)(\text{由 }E(M\,Ⓟ_\eta)I\text{ 为左正则带})\end{aligned}$$

$$=(1, i\cdot {}^{(a,i)}j\cdot i)(a,i)=((a,i)(1,j))^{+}(a,i).$$

从而 $M\textcircled{P}_\eta I$ 为一左正则型 A 半群.

(4) 设 $((a,i),(b,j))\in\sigma\cap\mathscr{R}^*$. 那么 $(a,i)\mathscr{R}^*(b,j)$. 由(2),知 $(1,i)\mathscr{R}(1,j)$. 据 $E(M\textcircled{P}_\eta I)$ 的左正则性,$(1,i)=(1,j)$. 于是 $i=j$. 由 $(a,i)\sigma(b,j)$,知存在 $(1,m),(1,n)\in M\textcircled{P}_\eta I$ 使得 $(1,m)(a,i)=(1,n)(b,j)$. 进而,$a=b$. 从而 $(a,i)=(b,j)$. 故 $\sigma\cap\mathscr{R}^*=\iota$. 于是 $M\textcircled{P}_\eta I$ 为真左正则型 A 半群. □

易知引理 2.4 给出定理 2.3 逆部分的证明. 为证明定理的直接部分,以下常设 S 为一以左正则带 E 为幂等元集的真左正则型 A 幺半群.

据引理 2.1,S/σ 为右消去幺半群. 用 1 记 S/σ 的幺元. 令

$$N=\{(a,i)\in S/\sigma\times E:(\exists\ s\in S)s\sigma=a\wedge s^{+}=i\},$$

显然,N 为 S/σ 和 E 的子直积,且 $\{1\}\times E\subseteq N$. 由 S 为真的,对于 N 中的任一元 (a,i) 都存在唯一的 $s\in S$ 使得 $s\sigma=a$ 且 $s^{+}=i$. 作映射

$\varphi: N\to\mathscr{T}_l(E),(a,i)\to\varphi(a,i);\ \varphi(a,i):E\to E,j\to{}^{(a,i)}j=(sj)^{+}$.

引理 2.5 φ 关于集合 N 满足 (P_1) 和 (P_2).

证明 (P_1) 显然成立. 令 $(a,i),(b,j)\in N$,则存在 $s,t\in S$ 使得 $s\sigma=a,t\sigma=b,s^{+}=i$ 且 $t^{+}=j$. 由 $\mathscr{R}^*$ 的左同余性,$st\mathscr{R}^*st^{+}\mathscr{R}^*(sj)^{+}={}^{(a,i)}j$. 于是 $(st)={}^{(a,i)}j,(st)\sigma=ab$. 这说明 $(ab,{}^{(a,i)}j)\in N$. 另一方面,对于任意的 $k\in E$,

$(stk)^{+}\mathscr{R}^*stk\mathscr{R}^*s(tk)^{+}=s\cdot{}^{(b,j)}k\mathscr{R}^*{}^{(a,i)(b,j)k}=\eta(a,i)\eta(b,j)(k)$.

于是 $\varphi(ab,{}^{(a,j)}j)(k)=\varphi(a,i)\varphi(b,j)(k)$. 从而 $\varphi(ab,{}^{(a,i)}j)=\varphi(a,i)\varphi(b,j)$,即 (P_2) 满足. □

引理 2.6 $S\cong S/\sigma\textcircled{P}_\varphi E$.

证明 仅需证明映射 $\psi:S\to S/\sigma\textcircled{P}_\varphi E,s\to\psi(s)=(s\sigma,s^{+})$ 为一半群同构. 由于 S 为真的,ψ 的定义是有定义的. 令 $\psi(s)=\psi(t)$,即 $(s\sigma,s^{+})=(t\sigma,t^{+})$. 则 $(s,t)\in\sigma\cap\mathscr{R}^*$. 于是 $s=t$. 从而 ψ 为单射. 又据集合 N 的定义知,ψ 为满射.

由于

$$\begin{aligned}\psi(s)\psi(t)&=(s\sigma,s^{+})(t\sigma,t^{+})=((st)\sigma,{}^{(s\sigma,s^{+})}t^{+})\\&=((st)\sigma,(st^{+})^{+})=((st)\sigma,(st)^{+})\quad(\text{由 }\mathscr{R}^*\text{ 的左同余性})\\&=\psi(st),\end{aligned}$$

ψ 为一半群同态. 从而 ψ 为一半群同构. □

至此,完成定理 2.3 的证明.

3 左正则型 A 幺半群

作为本节的开始,先介绍几个概念.

令 S 和 T 均为半群. 称半群 S 到 T 的(满)同态 φ 为 $\mathscr{R}^*$-(满)同态,如果关于任意 $a,b\in S,\varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow a\mathscr{R}^*(S)\ b$(见,[3]).

定义 3.1 称真左正则型 A 幺半群 T 为左正则型 A 幺半群 S 的一 P-覆盖,如果存在从 T 到 S 上的 $\mathscr{R}^*$-满同态 φ,且 φ 为幂等元提升的(即,关于任意 $e\in E(S)$ 都有 $f\in E(T)$ 使得 $e=\varphi(f)$).

定义 3.2 令 S 为一左正则型 A 幺半群，M 为一以 1 为幺元的右消去幺半群. 称从 M 到 $P(S)$（S 所有子集组成的集合）的映射 θ 为满的，如果下列条件满足

(S_1) $\theta_{(m)}\neq\varnothing(m\in M)$；

(S_2) $\theta_{(m)}\theta_{(n)}\subseteq\theta_{(mn)}(m,n\in M)$；

(S_3) $\bigcup_{m\in M}\theta_{(m)}=S$；

(S_4) $\theta_{(1)}=E(S)$；

(S_5) $|R_a^*\cap\theta_{(m)}|\leqslant 1(a\in S,m\in M)$，此处 R_a^* 为 S 的含有 a 的 $\mathscr{R}^*$-类.

引理 3.3 令 S 为一左正则型 A 幺半群，M 为一右消去幺半群. 若 $\theta:M\to P(S)$ 是满的，则

$$T=\{(s,m)\in S\times M:s\in\theta_{(m)}\}$$

是 S 的 P-覆盖.

证明 设 T 如引理所述. 由于 θ 是满的，$\theta_{(1)}=E(S)$. 于是

$$E(T)=\{(e,1):e\in E(S)\}\cong E(S).$$

从而 T 为幺半群.

设 $(a,g),(b,h),(c,k)\in T$，且 $(b,h)(a,g)=(c,k)(a,g)$. 那么 $(ba,hg)=(ca,kg)$. 进而，$ba=ca$ 且 $hg=kg$. 从而 $ba^+=ca^+$ 且 $h=k$. 显然，$(b,h)(a^+,1)=(c,k)\circ(a^+,1)$. 再结合 $(a^+,1)(a,g)=(a,g)$，知 $(a,g)\mathscr{R}^*(a^+,1)$. 由此，$(a,g)\mathscr{R}^*(b,h)\Leftrightarrow a\mathscr{R}^*b$. 从而 T 为左富足半群. 又令 $(e,1)\in E(T)$，则 $(a,g)(e,1)=(ae,g)=((ae)^+a,g)=((ae)^+,1)(a,g)$. 故 T 为左正则型 A 幺半群.

在半群 T 中，事实上有

$$\begin{aligned}(a,g)\sigma(b,h)&\Leftrightarrow(\exists\ e,f\in E(S))(e,1)(a,g)=(f,b)(b,h)\\&\Leftrightarrow(\exists\ e,f\in E(S))ea=fb\text{ 且 }g=h\\&\Leftrightarrow a\sigma(s)b\text{ 且 }g=h.\end{aligned}$$

设 $((a,g),(b,h))\in\sigma\cap\mathscr{R}^*$. 由 $(a,g)\mathscr{R}^*(b,h)$，知 $(a^+,1)\mathscr{R}^*(b^+,1)$. 于是 $a^+=b^+$，即 $a\mathscr{R}^*b$. 由引理 2.1，再注意到 $(a,g)\sigma(b,h)$，知 $g=h$. 于是，由 (S_5)，$a=b$. 从而 $(a,g)=(b,h)$. 则 $\sigma\cap\mathscr{R}^*=\iota_T$. 故 T 为真的.

易知，从 T 到 S 的投射 $\psi:(a,g)\to a$ 为幂等元提升的 $\mathscr{R}^*$-满同态.

综上所述，T 为 S 的 P-覆盖. □

下面是本节的主要定理.

定理 3.4 任一左正则型 A 幺半群均有 P-覆盖.

证明 为方便，将 Y 到 Y 的映射 f 和 $\{(x,f(x))\in Y\times Y:x\in Y\}$ 等同看待.

令 S 为一左正则型 A 幺半群，$a\in S$. 用 W^a 记 Sa^+ 到 Sa 的映射：$x\to xW^a=xa$. 由 $a\mathscr{R}^*a^+$ 知，W^a 为 1—1 的映射. 令 S' 为与 S 不交的集合，且 $|S|=|S'|$. 若 S 有限的，则 $X\stackrel{d}{=}S$，否则 $X\stackrel{d}{=}S\cup S'$. 又令 $M\stackrel{d}{=}\{g\in G(x):(\exists\ s\in S)W^s\subseteq g\}$，其中 $G(X)$ 为 X 上的对称群. 则 M 为右消去幺半群. 现定义 $\theta:m\to\theta_{(m)}(m\in M)$，其中 $\theta_{(m)}=\{s\in S:W^s\subseteq m\}$.

下面证明 θ 是满的.

由 $\theta_{(m)}$ 的定义，知 $\theta_{(m)}\neq\varnothing$. 令 $s\in\theta_{(m)},t\in\theta_{(n)}$. 则 $W^s\subseteq m$ 且 $W^t\subseteq n$. 由 $\mathscr{R}^*$ 的左同余性，知 $s^+(st^+)^+\mathscr{R}^*st^+\mathscr{R}^*(st)^+$. 据 $E(S)$ 为左正则带，知 $s^+(st^+)^+=s^+(st^+)^+s^+$. 易知，$\mathrm{dom}(W^sW^t)$

$=\mathrm{dom}(W^{a})$. 进而，$W^{a}=W^{s}W^{t}$. 于是 $st\in\theta_{(mn)}$. 从而 $\theta_{(m)}\theta_{(n)}\subseteq\theta_{(mn)}$.

考虑到 W^{a} 为 1－1 的映射，有 $|Sa^{+}|=|Sa|$. 当 $|S|<+\infty$ 时，$|S\backslash Sa^{+}|=|S\backslash Sa|$. 当 $|S|=+\infty$ 时，$|X\backslash Sa^{+}|=|S\backslash Sa^{+}|+|S'|=|S|=|X\backslash Sa|$. 从而 $|X\backslash Sa^{+}|=|X\backslash Sa|$. 现令 h 为 $X\backslash Sa^{+}$ 到 $X\backslash Sa$ 上的 1－1 的映射，则 $g\overset{d}{=}h\cup W^{a}$ 为 X 上的置换. 显然，$W^{a}\subseteq g$. 由 M 的定义和 θ 的定义，知 $g\in M$ 且 $a\in\theta_{(g)}$. 于是(S_3)成立.

设 $e\in E(S)$. 那么 W^{e} 为幂等元. 于是 $W^{e}\subseteq\iota_X$. 从而 $e\in\theta_{(1)}$. 进而，$E(S)\subseteq\theta_{(1)}$. 反之，令 $a\in\theta_{(1)}$，则 $W^{a}\subseteq\iota_X$. 于是 $a^{+}=a^{+}\iota_X=a^{+}W^{a}=a$，即 $a\in E(S)$. 从而 $\theta_{(1)}\subseteq E(S)$. 于是 $\theta_{(1)}=E(S)$.

设 $a,b\in\theta_{(m)}$ 且 $a\mathscr{R}^{*}b$. 那么 $W^{a},W^{b}\subseteq m$ 且 $a^{+}=b^{+}$. 从而 $W^{a}=m|_{Sa^{+}}=m|_{Sb^{+}}=W^{b}$. 进而，$a=b$. 于是$(S_5)$成立.

综合上述，θ 为满的. 于是，由引理 3.3，$T=\{(s,g)\in S\times M:s\in\theta_{(g)}\}$为 S 的 P-覆盖. □

余下部分将给出左正则型 A 幺半群的 P-覆盖的结构.

定义 3.5　令 T 为左正则型 A 幺半群 S 的 P-覆盖，M 为一右消去幺半群. 称 T 为 S 关于 M 的 P-覆盖，如果 $T/\sigma\cong M$.

定理 3.6　令 S 为一左正则型 A 幺半群，M 为一右消去幺半群. 若 $\theta:M\to P(S)$为满的，且满足条件.

(C)　令 $s\in\theta_{(g)}$，则 $\theta_{(g)}\subseteq\sigma_s$，其中 σ_s 为 S 中含有 s 的 σ-类.

则 $T=\{(s,m)\in S\times M:s\in\theta_{(m)}\}$是 S 关于 M 的 P-覆盖. 反之，任一 S 关于 M 的 P-覆盖均可这样构造.

证明　为证定理的直接部分，由引理 3.3，须证 $T/\sigma\cong M$. 据条件(C)和引理 3.3 的证明知，$(a,g)\sigma(b,h)\Leftrightarrow g=h$. 于是有 $T/\sigma\cong M$.

反之，设 ψ 为真左正则型 A 幺半群 T 到 S 上的幂等元提升的 $\mathscr{R}^{*}$-满同态，且 $M=T/\sigma$. 显然，T 为 S 关于 M 的 P-覆盖. 定义如下映射

$$\theta:M\to P(S),g\to\theta_{(g)}，其中\ \theta_{(g)}=\{s\in S:(\exists\ t\in T)s=t\psi\ 且\ t\sigma=g\}.$$

下面证明 θ 为满的，且满足条件(C). 显然 $\theta_{(g)}\neq\varnothing$. 令 $s\in\theta_{(g)}$，$t\in\theta_{(h)}$，则存在 $u,v\in T$ 使得 $s=u\psi$，$t=v\psi$，$u\sigma=g$ 且 $v\sigma=h$. 于是 $st=(uv)\psi$ 且 $(uv)\sigma=gh$. 从而 $\theta_{(g)}\theta_{(h)}\subseteq\theta_{(gh)}$. 又由 θ 的定义，知 $\bigcup_{g\in M}\theta_{(g)}=S$.

令 $s\in\theta_{(1)}$，则存在 $u\in T$ 使得 $s=u\psi$ 且 $u\sigma=1$. 由 $u^{+}\sigma=1$，$(u,u^{+})\in\sigma\cap\mathscr{R}^{*}$. 由 T 为真的，$u=u^{+}$. 从而 $s=u^{+}\psi\in E(S)$. 故 $\theta_{(1)}\subseteq E(S)$. 反之，由 ψ 是幂等元提升的知，$E(S)\subseteq\theta_{(1)}$. 因此，$\theta_{(1)}=E(S)$.

现定义映射 $\eta:T\to T'\overset{d}{=}\{(s,g)\in S\times M:s\in\theta_{(g)}\}$，$t\to(t\psi,t\sigma)$. 由 θ 的定义，η 为 T 到 T'的满同态. 设$(t\psi,t\sigma)=(u\psi,u\sigma)(t,u\in T)$. 那么 $t\psi=u\psi$ 且 $t\sigma=u\sigma$. 于是$(t,u)\in\sigma\cap\mathscr{R}^{*}$. 从而，$t=u$. 故 ψ 为一半群同构. 故 T'为真左正则型 A 幺半群.

令 $s,t\in\theta_{(g)}$且 $s\mathscr{R}^{*}t$，则(s,g)，$(t,g)\in T$ 且由引理 3.3 的证明，知$(s,g)\mathscr{R}^{*}(t,g)$. 据 η 为一同构，有 $u,v\in T$ 使得 $\eta(u)=(u\psi,u\sigma)=(s,g)$且 $\eta(v)=(v\psi,v\sigma)=(t,g)$. 于是$(u,v)\in\sigma$. 由引理 2.1，有 $e,f\in E(T)$使得 $eu=fv$. 所以 $\eta(e)(s,g)=\eta(f)(t,g)$，即$(s,g)\sigma(t,g)$. 从而$((s,g),(t,g))\in\sigma\cap\mathscr{R}^{*}$. 由 T'为真的，$(s,g)=(t,g)$. 显然，$s=t$. 于是(S_5)满足.

又设 $s,t\in\theta_{(g)}$. 那么有 $u,v\in T$ 使得 $s=u\psi$，$t=v\psi$ 且 $u\sigma=g=v\sigma$. 由引理 2.1，有 $k,l\in E$

(T)使得 $ku=lv$. 于是 $k\psi\cdot s=l\psi\cdot t$,即$(s,t)\in\sigma$. 从而 θ 满足条件(C). 至此,完成定理的证明.

据定理 3.6 的逆部分的证明,有

推论 3.7 左正则型 A 幺半群 S 的 P-覆盖是 S 关于某一右消去幺半群 M 的 P-覆盖.

注记 据引理 3.3 和定理 3.4,知可利用真左正则型 A 幺半群给出左正则型 A 幺半群的结构.

致谢 作者感谢郭聿琦教授的指导.

参 考 文 献

[1] Fountain J. *Abundant semigroups* [J]. Proc. London Math. Soc., 1982, **44**(3): 103—129.

[2] Fountain J. *Adequate semigroups* [J]. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1979, **22**: 113—125.

[3] Fountain J. *A class of right PP monoids* [J]. Quart. J. Math. Oxford, 1977, **28**(2): 285—300.

[4] Fountain J and Gomes G M S. *Left proper E-dense monoids* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1992, **80**: 1—27.

[5] Fountain J and Gomes G M S. *Proper left type A monoids revisited* [J]. Glasgow Math. J., 1993, **35**: 293—306.

[6] Fountain J and Gomes G M S. *Proper left type A covers* [J]. Protugaliae Math., 1994, **51**: 294—306.

[7] McAlister D B. *Groups, semilattices and inverse semigroups* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **192**: 227—244.

[8] McAlister D B. *Groups, semilattices and inverse semigroups* Ⅱ [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **196**: 351—370.

[9] Lawson M V. *The structure of type A semigroups* [J]. Quart. J. Math. Oxford, 1986, **37**(2): 279—298.

[10] Howie J M. *An Introduction to Semigroup Theory* [M]. Academic Press, London, 1976.

Right Cancellative Monoids, Left Regular Bands and Left Regular Type *A* Monoids

GUO Xiao-jiang[1], TIAN Zhen-ji[2]

1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064;
1. Dept. of Math., Yunnan University, Kunming 650091;
2. Dept of Basic Courses, Lanzhou Institute of Railroad, Lanzhou 730070

Abstract: In this paper the structure of proper left regular type *A* monoids is established in terms of right cancellative monoids and leftregular bands. After it is proved that every left regular type *A* monoid always has a P-cover, the structure of such cover is given.

Key words: right cancellative monoid; left regular band; left regular type *A* monoid; P-cover.