第19卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 19 No. 3
1999年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1999

推广的Kantorovich多项式算子在$L_{p[0,1]}(1\leqslant p)$中的一个局部逆定理*

刘吉善[1]， 陈广荣[2]

1. 大连水产学院，大连 116023；
2. 河北科技大学，石家庄 050054

摘 要：本文在引进了推广的Kantorovich多项式算子的条件下，假设$\{\alpha_n\}$有界得到了该算子在逼近过程中的局部逆定理，从而推广了文献[1]中Z. Ditzian的结果.

关键词：Kantorovich多项式算子；逼近；逆定理.
分类号：AMS(1991) 41A10/CLC O174.41
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)03-0573-07

1 引 言

我们已经知道，Bernstein-Kantorovich多项式算子定义为

$$B_n^*(f,x)=\sum_{i=0}^{n}(n+1)\int_{I_{n,i}}f(t)\mathrm{d}t\cdot p_{n,i}(x),\tag{1.1}$$

其中 $p_{n,i}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$，$I_{n,i}=[\frac{i}{n+1},\frac{i+1}{n+1}]$， $(i=0,1,\cdots,n)$.

有关函数的光滑性和$\|f-B_n^*(f)\|_p$的收敛速度之间的关系已经有大量的研究成果，其中Z. Ditzian[1]证明了当$x(1-x)f'(x)\neq c$，$x\in[a,b]$时

$$\|B_n^*(f)-f\|_{L_p[a,b]}=O(\frac{1}{n})\tag{1.2}$$

是最好的收敛速度，且决定了达到此收敛速度的函数类，给出了一个局部逆定理，即刻划了满足

$$\|B_n^*(f)-f\|_{L_p[a,b]}=O(\frac{1}{n^\alpha})\qquad 0<\alpha<1\tag{1.3}$$

的函数类.

定义 设$\alpha_n\geqslant 0$，$k\in N$，对于任意$f\in L_{p[a,b]}$，称

$$M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)=(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int_0 f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+$$

* **收稿日期**：1996-11-01
作者简介：刘吉善(1937-)，男，辽宁省大连市人，大连水产学院教授.

$$y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_kP_{n,i}(x) \tag{1.4}$$

为推广的 Kantorovich 多项式算子，其中 $P_{n,i}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

特别当 $k=1$, $\alpha_n=0$ 时 $M_n^{(k)}(0,f,x)$即为函数 f 的 Bernstein-Kantorovih 多项式算子.

在[5]中研究了在一定条件下，$\| M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)-f\|_{L_p[a,b]}=O(\frac{1+\alpha_n}{n})$是最佳收敛速度，其中$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，且刻画了达到此收敛速度的函数类. 这里，将由 $\| M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)-f\|_{L_p[a,b]}\to 0$ 的收敛速度导出 f 的连续模，得到了 $M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)$的逼近过程中的局部逆定理.

2 局部逆定理

定理 设 $k\in N$, $\alpha_n\geqslant 0$, $\alpha_n'=O(1)$ $(n\to\infty)$, $0<a<a_1<b_1<b<1$, $f\in L_{p[a,b]}$且

$$\| M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)-f(t)\|_{L_p[a,b]}\leqslant Cn^{-\frac{\beta}{2}}\quad(0<\beta<2), \tag{2.1}$$

则 $f\in L_{ip*}(\beta,P,(a_1,b_1))$，即对于 $h\leqslant\frac{1}{2}\min(b-b_1,a_1-a)$

$$W_2(f,h,P,(a_1,b_1))=\sup_{|r|\leqslant h}\|\Delta_r^2 f\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}\leqslant Mh^\beta, \tag{2.2}$$

其中 $\Delta_r^2 f=f(x+r)-2f(x)+f(x-r)$. 为了定理的证明，先引入下述几个引理.

引理 1 设 $\varphi\in L_{p[0,1]}(1\leqslant P<\infty)$, $\mathrm{supp}\varphi\subset[a_1,b_1]$，则

$$\|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,\varphi,u)\|_{L_p[a,b]}\leqslant Cn\|\varphi\|_{L_p[a,b]}$$

对于 $0<a<a_1<b_1<b<1$ 成立.

引理 2 设 $\psi'',\psi'''\in L_{p[a,b]}(1\leqslant P<\infty)$，且 $\mathrm{supp}\psi\subset[a,b]$，则对于 $0<a<a_1<b_1<b<1$, $\alpha_n=O(1)$有 $\|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,\psi,u)\|_{L_p[a,b]}\leqslant C[\|\psi''\|_{L_p[a,b]}+\frac{1}{n}\|\psi'''\|_{L_p[a,b]}]$.

引理 3 设 $f\in L_{p[a,b]}(1\leqslant P<\infty)$，且 $0<a<a_2<a_1<b_1<b_2<b<1$，则存在函数 F_h 满足

$$\|f-F_h\|_{L_p[a_1,b_1]}\leqslant\frac{1}{2}W_2(f,h,P,[a_2,b_2]),$$

$$\|F''_h\|_{L_p[a_1,b_1]}\leqslant h^{-2}W_2(f,h,P,[a_2,b_2]),$$

$$\|F'''_h\|_{L_p[a_1,b_1]}\leqslant h^{-3}W_2(f,h,P,[a_2,b_2]),$$

其中 W_2 的含义见(2.2)式.

上述引理的证明见[3]与[4].

定理的证明 为此只需证明对 $\|f\|_{L_p[a_1,b_1]}\leqslant 1$ 结论成立即可. 分三种情况予以讨论.

(Ⅰ) 当 $a_1<a_2<b_2<b_1$ 时，$\mathrm{supp}f\subset[a_2,b_2]$，对于$|r|<h$，显然有

$$\|\Delta_r^2(f(x))\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}\leqslant\|\Delta_r^2(f-M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x))\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}+\|\Delta_r^2(M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x))\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}.$$

由于 $\Delta_r^2 f(x)=f(x+r)-2f(x)+f(x-r)$及$|r|<h\leqslant\frac{1}{2}\min(b-b_1,a_1-a)$有

$$\|\Delta_r^2(f-M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x))\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}\leqslant 4\cdot c\,n^{-\frac{\beta}{2}}.$$

因为 $M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\in c^\infty$，再利用 Taylor 公式得

$$\|\Delta_r^2(M_n^{(k)}(\alpha_n,f,u))\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}$$

$$\leqslant \left\|\int_t^{t+r}(t+r-u)\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,u)du\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}+$$

$$\left\|\int_{t-r}^{t}(t-r-u)\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,u)du\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]},$$

由于 h,r 的限制，对 $p>1$ 时，利用 Jenson 不等式，对 $p=1$ 时，利用 Fubini 定理，可得

$$\left\|\int_t^{t+r}(t+r-u)\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,u)du\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}$$

$$\leqslant\frac{r^2}{2}\left\|\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,u)\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}.$$

对于 $\left\|\int_{t-r}^{t}(t-r-u)\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,u)du\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}$ 也有类似的估计.

设 $\eta\leqslant\frac{1}{4}\min(a_2-a_1,b_1-b_2)$，令 $f=f-F_\eta+F_\eta$，利用引理 3，可得

$$\|\Delta_r^2M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\|\leqslant r^2\|M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}$$

$$\leqslant r^2\left(\left\|\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,f-F_\eta,u)\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}+\right.$$

$$\left.\left\|\frac{d^2}{du^2}M_n^{(k)}(\alpha_n,F_\eta,u)\right\|_{L_p[a_1+r,b_1-r]}\right)\tag{2.3}$$

为了估计(2.3)的右边，对于 $|r|\leqslant h$ 和充分小的 η，利用引理 1 和引理 2 的结果，得到

$$W_2(f,h,p,[a_1,b_1])\leqslant 4Cn^{-\frac{\beta}{2}}+h^2\{\frac{C}{2}nW_{2,p}(f,\eta,[a_1,b_1])+$$

$$2C_2\eta^{-2}W_{2,p}(f,h,[a_1,b_1])+Cn^{-1}\eta^{-3}W_2(f,\eta,P[a_1,b_1])\}.$$

取 $n\leqslant\eta^{-2}\leqslant n+1$，并记 $W_2(h)=W_2(f,h,p,[a_1,b_1])$，则 $W_2(h)\leqslant M(\eta^\beta+h^2\eta^{-2}W_2(\eta))$. 再利用[3]的引理，得 $W_2(h)\leqslant Mh^\beta$.

(Ⅱ) 讨论一般支集，设 $0<\beta<1$. 为此证明，如果 $\|M_n^{(k)}(\alpha_n,f,t)-f(t)\|_{L_p[a,b]}=O(r^{-\frac{\beta}{2}})$，则对 $\eta=\frac{1}{5}\min(a_1-a,b-b_1)$，$g\in C^2$，$\operatorname{supp}g\subset[a+2\eta,b-2\eta]$和 $g(t)=1$ $(t\in[a_1-2\eta,b_1+2\eta])$，有

$$\|M_n^{(k)}(\alpha_n,fg,t)-f(t)g(t)\|_{L_p[a+\eta,b-\eta]}=O(n^{-\frac{\beta}{2}}).\tag{2.4}$$

由(Ⅰ)知，上式蕴含 $W_2(fg,h,p,(a_1-2\eta,b_1+2\eta))\leqslant Mh^\beta$，从而 $W_2(f,h,p,(a_1,b_1))\leqslant Mh^\beta$，当 $h<\eta$. 记

$$\|M_n^{(k)}(\alpha_n,fg,t)-f(t)g(t)\|_{L_p[a+\eta,b-\eta]}$$

$$\leqslant\|M_n^{(k)}(\alpha_n,fg,t)-g(t)M_n^{(k)}(\alpha_n,f,t)\|_{L_p[a_1+\eta,b_1-\eta]}+$$

$$\|g(t)[M_n^{(k)}(\alpha_n,f,t)-f(t)]\|_{L_p[a_1+\eta,b_1-\eta]}=I_1+I_2,$$

$$I_2=\|g(t)[M_n^{(k)}(\alpha_n,f,t)-f(t)]\|_{L_p[a_1+\eta,b_1-\eta]}$$

$$\leqslant\|g\|_\infty\|M_n^{(k)}(\alpha_n,f,t)-f(t)\|_{L_p[a_1+\eta,b_1-\eta]}.$$

对于 I_1，利用微分中值定理，得到

$$I_1 = \| M_n^{(k)}(\alpha_n, fg, t) - g(t) M_n^{(k)}(\alpha_n, f, t)] \|_{L_p[a_1+\eta, b_1-\eta]}$$

$$= \| M_n^{(k)}(\alpha_n, f(u) g'(\xi)(u-t), t) \|_{L_p[a_1+\eta, b_1-\eta]},$$

其中 ξ 在 u 与 t 之间，$u = \frac{1}{n+k+\alpha_n} + y_1 + y_2 + \cdots + y_k$.

当 $p>1$ 时，

$$I_1 \leqslant \| g' \|_{C_{[a,b]}} \| \{M_n^{(k)}(\alpha_n, |f|^p, t)\}^{\frac{1}{p}} \cdot \{M_n^{(k)}(\alpha_n, |u-t|^q, t)\}^{\frac{1}{q}} \|_{L_p[a_1+\eta, b_1-\eta]}$$

$$\leqslant cn^{-\frac{1}{2}} \| g' \|_{C_{[a,b]}} \| f \|_{L_p};$$

当 $p=1$ 时，

$$I_1 \leqslant \| g' \|_{C_{[a,b]}} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} P_{n,i}(t)(n+k+\alpha_n)^k$$

$$\cdot \int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}} \cdots \int \left| \frac{i}{n+k+\alpha_n} + y_1 + y_2 \cdots + y_k - t \right|$$

$$\cdot \left| f\left(\frac{i}{n+k+\alpha_n} + y_1 + y_2 \cdots + y_k\right) \right| \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_k \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \| g' \|_{C_{[a,b]}} \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 P_{n,i}(t)\left(2\left| \frac{i}{n+k+\alpha_n} - t \right| + 2 \frac{i}{n+k+\alpha_n}\right)(n+k+\alpha_n)^k$$

$$\cdot \int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}} \cdots \int \left| f\left(\frac{i}{n+k+\alpha_n} + y_1 + y_2 \cdots + y_k\right|\right. \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_k \mathrm{d}t$$

$$\leqslant Cn^{-\frac{1}{2}} \| g' \|_C \| f \|_{L_1}.$$

利用条件(2.1)及上述结果，可得 $\| M_n^{(k)}(\alpha_n, fg, t) - f(t) g(t) \|_{L_p[a_1+\eta, b_1-\eta]} = O(n^{-\frac{\beta}{2}})$，得到(2.4)，问题得征.

(Ⅲ) 当 $1 \leqslant \beta < 2$，选取 $\delta = \frac{\eta}{2}$，首先由(Ⅱ)知 $\| M_n^{(k)}(\alpha_n, fg, t) - f(t) \|_{L_p[a,b]} = O(n^{-\frac{\beta}{2}})$ 蕴含 $W_2(f, h, p, (a_1-\eta, b_1+\eta)) \leqslant Mh^{1-\varepsilon}$，从而 $W_1(f, h, p, (a_1-\eta, b_1+\eta)) \leqslant M_1(\varepsilon) h^{1-\varepsilon}$. 只需要估计

$$\| M_n^{(k)}(\alpha_n, fg, t) - f(t) g(t) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]} = O(n^{-(1-\varepsilon)}) \tag{2.5}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 成立即可. 为此记

$$\| M_n^{(k)}(\alpha_n, fg, t) - f(t) g(t) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]}$$

$$\leqslant \| M_n^{(k)}(\alpha_n, (f(u) - f(t))(g(u) - g(t)), t) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]} +$$

$$\| f(t)(M_n^{(k)}(\alpha_n, g, t) - g(t)) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]} +$$

$$\| g(t)(M_n^{(k)}(\alpha_n, g, t) - f(t)) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

其次，类似于(Ⅱ)中估计 I_2 的方法，可得到 $J_3 = \| g(t)(M_n^{(k)}(\alpha_n, f, t) - f(t)) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]}$ 的估计. 对于 J_2，因 $g \in C^2$，应用[5]中的定理 4 得

$$J_2 = \| f(t)(M_n^{(k)}(\alpha_n, g, t) - g(t)) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]}$$

$$\leqslant \| f \|_p \| M_n^{(k)}(\alpha_n, g, t) - g(t) \|_\infty \leqslant C \cdot \frac{1}{n} \| f \|_p.$$

最后估计 J_1，为此记 $a_3 = a_1 - \delta$，$b_3 = b_1 + \delta$.

$$J_1 = \| M_n^{(k)}(\alpha_n, (f(u) - f(t))(g(u) - g(t)), t) \|_{L_p[a_1-\delta, b_1+\delta]}$$

$$\leqslant \| M_n^{(k)}(\alpha_n, (f(u) - f(t)) g'(\xi)(u - t)\chi_{[a,b]}(u), t) \|_{L_p[a_3, b_3]} + O\left(\frac{1}{n^l}\right) \quad (\forall\, l > 0).$$

1）当 $p > 1$ 时，有

$$J_1 \leqslant \| g' \|_{C_{[a,b]}} \| M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \chi_{[a,b]}(u), t)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot M_n^{(k)}(\alpha_n, |u - t|^q, t)^{\frac{1}{q}} \|_{L_p[a_3, b_3]}$$

$$\leqslant C_1 \| g' \|_{C_{[a,b]}} n^{-\frac{1}{2}} \| M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \chi_{[a,b]}(u), t)^{\frac{1}{p}} \|_{L_p[a_3, b_3]}.$$

取 $m > p$，并记

$$\varphi_l(u, t) = \begin{cases} 1, & 2^l n^{-\frac{1}{2}} \leqslant |t - u| < 2^{l+1} n^{-\frac{1}{2}},\ u \in [a, b], t \in [0, 1], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

对 $0 \leqslant l < \infty$，以及

$$\varphi_*(u, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |t - u| \leqslant n^{-\frac{1}{2}},\ u \in [a, b], t \in [0, 1], \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

有

$$\int_{a_3}^{b_3} [M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \chi_{[a,b]}(u), t)] dt$$

$$\leqslant \int_{a_3}^{b_3} [M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \varphi_*(u, t), t)] dt +$$

$$\int_{a_3}^{b_3} \sum_{l=0}^{\infty} M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \varphi_l(u, t), t) dt$$

$$= J_{1,1} + J_{1,2},$$

$$J_{1,2} = \int_{a_3}^{b_3} \sum_{l=0}^{\infty} M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \varphi_l(u, t), t) dt$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \int_{a_3}^{b_3} M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \varphi_l(u, t), t) dt.$$

利用 Stirling 公式

$$\int_{a_3}^{b_3} M_n^{(k)}(\alpha_n, |f(u) - f(t)|^p \varphi_l(u, t), t) dt$$

$$\leqslant \int_{a_3}^{b_3} (n + k + \alpha_n)^{k-1} \int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}} \cdots\cdots \int \left\{ \int_{y_1 + y_2 \cdots + y_{k-1}}^{\frac{n}{n+k+\alpha_n} + y_1 + y_2 \cdots + y_{k-1}} \varphi_l(y_k, t) \right.$$

$$\cdot |f(y_k) - f(t)|^p dy_k \Big\} dy_1 dy_2 \cdots dy_{k-1} p(n, y_1, \cdots, y_k, t) dt,$$

其中

$$P(n,y_1,\cdots,y_k,t)=\begin{cases}P_{n,i}(t), & y_k\in I_{k,i}\quad(0\leqslant i\leqslant n),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$I_{n,i}=\left[\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_{k-1},\frac{i+1}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_{k-1}\right].$$

于是

$$\int_{a_3}^{b_3}M_n^{(k)}(\alpha_n,|f(u)-f(t)|^p\varphi_l(u,t),t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_{a_3}^{b_3}(n+k+\alpha_n)^k\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\cdots\int\{\int_{y_1+y_2\cdots+y_{k-1}}^{\frac{n}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_{k-1}}|f(u)-f(t)|^p$$

$$\cdot\varphi_l(y_k,t)(2^ln^{-\frac{1}{2}})^{-2m}|t-y_k|^{2m}\mathrm{d}y_k\}$$

$$\cdot P(n,y_1,\cdots,y_k,t)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_{k-1}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C[W_1(f,2^{l+1}n^{-\frac{1}{2}},P,[a_3,b_3])]^p\cdot(2^ln^{-\frac{1}{2}})^{-2m}M_n^{(k)}(\alpha_n,|t-u|^{2m},t)$$

$$\leqslant C(m)[W_1(f,2^{l+1}n^{-\frac{1}{2}},P,[a_3,b_3])]^p\cdot 2^{-2ml}$$

对于 $l=0,1,\cdots$均成立.

$$J_{1,2}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}C(m)2^{-2ml}[W_1(f,2^{l+1}n^{-\frac{1}{2}},P,[a_3,b_3])]^p,$$

利用同样方法可以得到

$$J_{1,1}=\int_{a_3}^{b_3}M_n^{(k)}(\alpha_n,|f(u)-f(t)|^p\varphi_*(u,t),t)\mathrm{d}t\leqslant C\cdot W_1(f,n^{-\frac{1}{2}},P,[a_3,b_3])^p,$$

由此得

$$\int_{a_3}^{b_3}[M_n^{(k)}(\alpha_n,|f(u)-f(t)|^p\chi_{[a,b]}(u),t)]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\cdot W_1(f,n^{-\frac{1}{2}},P,[a_3,b_3])^p+$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}C(m)2^{-2ml}[W_1(f,2^{l+1}n^{-\frac{1}{2}},P,[a_3,b_3])]^p$$

$$\leqslant C\cdot n^{-(\frac{1}{2}-\varepsilon)P}+C(m)\sum_{l=0}^{\infty}2^{-2ml}\cdot 2^{(l+1)P}n^{-(\frac{1}{2}-\varepsilon)P}$$

$$\leqslant C_2\cdot n^{-(\frac{1}{2}-\varepsilon)P}$$

对任意 $\varepsilon>0$ 及 $P>1$ 成立,完成 J_1 的估计.

2) 当 $P=1$ 时,

$$J_1\leqslant\|g'\|_{C_{[a,b]}}\int_{a_3}^{b_3}M_n^{(k)}(\alpha_n,|f(u)-f(t)||u-t|\chi_{[a,b]}(u),t)dt+O(n^{-l})$$

$$\leqslant\|g'\|_{C_{[a,b]}}\int_{a_3}^{b_3}M_n^{(k)}(\alpha_n,|f(u)-f(t)||u-t|\varphi_*(u,t),t)\mathrm{d}t+$$

$$\|g'\|_{C_{[a,b]}}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{a_3}^{b_3}M_n^{(k)}(\alpha_n,|f(u)-f(t)||u-t|\varphi_l(u,t),t)dt+O(n^{\frac{1}{l}})$$

$$\leqslant \| g' \|_{C_{[a,b]}} n^{-\frac{1}{2}} C_1 W_1(f, n^{-\frac{1}{2}}, 1, [a_3, b_3]) +$$

$$\| g' \|_{C_{[a,b]}} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l+1} n^{-\frac{1}{2}} C(m)^{-2ml} W_1(f, 2^{l+1} n^{-\frac{1}{2}}, P, [a_3, b_3])$$

$$\leqslant C_2 \| g' \|_{C_{[a,b]}} n^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}$$

$$\leqslant C_2 \| g' \|_{C_{[a,b]}} n^{-1+\varepsilon}.$$

综合 J_1, J_2, J_3 的估计，知(2.5)式对任意 $\varepsilon>0$ 成立，这就证明了结论.

应该注意的是本定理的假设条件是在此结论成立的区间上给出的，这有时候是必要的.

注 内蒙古师范大学李长青参加了研究工作.

参 考 文 献

[1] Ditzian Z and May C P. *L_p-Saturation and inverse theorem for modifich Bernstein Polynomials* [J]. Indina Math. J., 1976, 733—751.

[2] 刘吉善，李长青，陈广荣. 推广的 *Kantorovich* 多项式的一些基本性质 [J]. 数学研究与评论，1993，**13** (2)：237—240.

[3] Becker M and Nessec R T. *An Elementary Approach to Inverse Approximation Theorems* [J]. J. A. T., 1978, **23**: 99—103.

[4] 何青，陈广荣. 推广的 Kantorovich 算子的某些重要性质 [J]. 河北科学院学报，1994，**11**(3)

[5] 陈广荣，刘吉善. 推广的 Kantorovich 多项式在 $L_{p[0,1]}(1 \leqslant p)$ 中的饱和性定理 [J]. 纯粹数学与应用数学，1998，**14**(3)：14—20.

Locally Inverse Theorem in the $L_{p[0,1]}(1 \leqslant p)$ for Generalized Kantorovich Polynomial Operator

LIU Ji-shan[1], CHEN Guang-rong[2]

1. Dalian Fisheries College, Dalian 116023;

2. Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054

Abstract: By introducing generalized Kantorovich polynomial operator and supposing $\{a_n\}$ is bounded, this article obtains the locally inverse theorem of this operator in the approximate process, thus generalizes Z. Ditzian's results in [1].

Key words: Kamtorovich polynomial operator; approximation; inverse theorem.