

# 对“关于《亚正定阵理论(II)》一文的错误”一文的注记\*

吕蕴霞, 张树青  
(烟台师范学院数学系, 烟台 264025)

**摘 要:**本文指出文[2]的错误, 拓广了 Minkowski 不等式, 同时修正了文[1],[2]的错误.

**关键词:**Minkowski 不等式; 矩阵; 亚半正定; 特征值.

**分类号:**AMS(1991) 15A/CLC O151.21

**文献标识码:**A **文章编号:**1000-341X(1999)03-0598-03

文[1]证明了如下定理

**定理 1** (广义 Minkowski 不等式) 设  $A$  是  $n$  阶亚正定阵,  $B$  是  $n$  阶正定(实对称)阵, 则

$$|A+B|^{\frac{1}{s}} > |A|^{\frac{1}{s}} + |B|^{\frac{1}{s}}.$$

**定理 2** 设  $A$  是  $n$  阶亚正定阵,  $B$  是  $n$  阶亚正定阵, 且  $B$  的特征值全是实数, 又设  $r([A, B]) \leq 1$ , 则仍成立广义 Minkowski 不等式.

文[2]用反例验证了以上两个定理中的结论均不成立, 并指出“要使结论成立, 两个定理均需附加条件‘亚正定阵  $A$  的特征值都是实数’”.

本文进一步指出, [2]对定理 1, 定理 2 的修正结果仍是错误的. 事实上, 取  $A$  为任一正定(实对称)阵, 并令  $B = tA$  ( $t > 0$ ), 则  $A, B$  满足定理 1 与定理 2 的条件, 且  $A$  的特征值都是实数, 但  $|A+B|^{\frac{1}{s}} = |A|^{\frac{1}{s}} + |B|^{\frac{1}{s}} = (1+t)|A|^{\frac{1}{s}}$ ; 又如果取

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1.8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

则  $A$  亚正定,  $B$  正定(实对称), 且  $A$  的特征值都是实数, 但易得  $|A+B|^{\frac{1}{s}} < |A|^{\frac{1}{s}} + |B|^{\frac{1}{s}}$ . 这表明, 即使将定理 1 中的严格不等式改为一般不等式, 结论也不成立.

下面给出上述结论的修正结果.

**定理 3** 设  $A$  是  $n$  阶亚正定(亚半正定)阵,  $B$  是  $n$  阶正定(实对称)阵, 则

$$|A+B|^s \geq |A|^s + |B|^s. \tag{1}$$

其中  $s$  是满足  $s(n+t) \geq 2$  的任一实数, 而  $t$  是  $AB^{-1}$  的实特征值的个数;

特别地, 如果  $AB^{-1}$  的特征值都是实数, 而  $sn \geq 1$ , 则

$$|A+B|^{\frac{1}{s}} \geq |A|^{\frac{1}{s}} + |B|^{\frac{1}{s}}. \tag{2}$$

\* 收稿日期: 1996-09-04; 修订日期: 1997-11-08

作者简介: 吕蕴霞(1944-), 女, 吉林省辽源市人, 烟台师范学院副教授.



于等于零). 故由(4)式及 Hölder 第二不等式有

$$|A + B|^s = \prod_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k)^s \geq \prod_{k=1}^n \lambda_k^s + \prod_{k=1}^n \mu_k^s = |A|^s + |B|^s.$$

## 参 考 文 献

- [1] 屠伯埏. 亚正定阵理论(Ⅱ) [J]. 数学学报, 1991, 1: 91—102.
- [2] 刘麦学. 关于“亚正定阵理论(Ⅱ)”一文的错误 [J]. 数学研究与评论, 1993, 4: 627—628.
- [3] 屠伯埏. 亚正定阵理论(I) [J]. 数学学报, 1990, 4: 462—471.
- [4] Laffey T J. *Simultaneous triangularization of matrices-low rank cases and the nonderogatory case* [J]. Lin and Multilin. Alg., 1978, 4: 269—305.
- [5] Choi M, Lurie P C, Radjavi H. *On commutators and invariant subspaces* [J]. Lin and Multilin. Alg., 1981, 4: 329—340.

## A Note for “The Mistakes on ‘Theory of Sub-Positive Definite Matrix’”

LÜ Yun-xia, ZHANG Shu-qing

(Dept. of Math., Yantai Teachers' University, 264025)

**Abstract:** In this paper, the mistakes in paper [1] are pointed, the Minkowski inequality are extended, and the mistakes in paper [1], [2] are corrected.

**Key words:** Minkowski inequality; matrix; sub-semi-positive definite; eigenvalue.