第19卷第3期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 3
1999年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1999

平稳序列中具有随机容量的多个随机中心秩顺序统计量的联合渐近分布*

王 晓 明

(海军大连舰艇学院，大连 116013)

摘 要：设$\{X_n\}$是平稳序列，$X_1^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant X_n^{(n)}$是$X_1,\cdots,X_n$的顺序统计量. 以$M_n$表示随机容量，$N_n(k)$，$k=1,\cdots,s$表示随机中心秩. 本文在强混合条件下得到了序列$\{(X_{N_n(1)}^{(M_n)},\cdots,X_{N_n(s)}^{(M_n)})\}$的极限分布.

关键词：平稳序列；随机容量；随机中心秩.

分类号 AMS(1991) 62F05/CLC O211.4

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)03-0601-07

1 引 言

设$\{X_n\}$是随机序列，$X_1^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant X_n^{(n)}$是$X_1,\cdots,X_n$的顺序统计量. $\{k_n\}$是一正整数列，如果$\min(k_n,n-k_n)\to\infty$，则称$\{k_n\}$是变秩序列. 若$k_n/n\to\lambda\in(0,1)$，则称$\{k_n\}$为中心秩序列，且称$X_{k_n}^{(n)}$为具有秩序列$\{k_n\}$的中心秩顺序统计量. 如果$\{N_n\}$和$\{M_n\}$是正整值r.v.序列，$1\leqslant N_n\leqslant M_n$，a.e.，并且$N_n/M_n\xrightarrow{P}\lambda\in(0,1)$，则称$\{N_n\}$为随机中心秩序列，而称$X_{N_n}^{(M_n)}$为具有随机容量$\{M_n\}$和随机中心秩$\{N_n\}$的顺序统计量. [1]就$\{X_n\}$是i.i.d.情况得到了所谓正则中心秩顺序统计量的极限分布类. [2]和[3]讨论了平稳序列情况，推广了[1]的结果. [4]对平稳序列上、下变秩顺序统计量的联合渐近分布进行了研究. [5]在[2]的基础上讨论了随机容量和随机中心秩的顺序统计量. 本文将对平稳序列讨论具有随机容量的多个随机中心秩顺序统计量的联合极限分布.

2 一个多维平稳示性变量阵列的中心极限定理

设$\{X_n,n\geqslant1\}$是平稳序列，X_1的d.f.为$F(x)$，记$\mathscr{F}_1^t=\sigma(X_1,\cdots,X_t)$，$\mathscr{F}_n^\infty=\sigma(X_n,X_{n+1},\cdots)$，称$\alpha(n)=\sup\{|P(AB)-P(A)P(B)|:A\in\mathscr{F}_1^t,B\in\mathscr{F}_{n+t}^\infty\}$，$n\geqslant0$，为$\{X_n\}$的混合系数. 令$u_{n,k}=a_{n,k}x_k+b_{n,k}$，$x_k\in R$，$a_{n,k}>0$，$b_{n,k}$是实数列，$I_{n,i}(k)=I(X_i<u_{n,k})$，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant k\leqslant s$，$n\geqslant1$.

---

* 收稿日期：1996-12-02

作者简介：王晓明(1956-)，男，河北兴隆县人，硕士，现为海军大连舰艇学院教授.

当 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)<\infty$,$F(u_{n,k})\to\lambda_k,k=1,2,\cdots,s$. 且 $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_s<1$ 时,对 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant s$,记

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}=F(\lambda_i)(1-F(\lambda_j))+\sum_{k=1}^{\infty}[P(X_1<a(\lambda_i),X_{k+1}<a(\lambda_j))-\lambda_i\lambda_j]+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[P(X_1<a(\lambda_j),X_{k+1}<a(\lambda_i))-\lambda_i\lambda_j], \tag{2.1}$$

其中 $a(\lambda_i)$的构成如[2]之引理 2.3,满足 $F(a(\lambda_i))=\lambda_i,i=1,\cdots,s$. 易知此时(2.1)中二和式收敛,故 σ_{ij}是有意义的. 以后恒记 $\Sigma=(\sigma_{ij})$.

定理 2.1 设 $X_{n,k}=(X_{n,k}(1),\cdots,X_{n,k}(s))^{\tau},1\leqslant k\leqslant N_n,n\geqslant 1$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上之 s 维随机向量阵列,$\{N_n\}$是正整数列. $\{\mathscr{B}_{n,k}\}$是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域,使得 $X_{n,k}$是 $\mathscr{B}_{n,k}$可测的. 假设 $\mathscr{B}_{n,k}\subset\mathscr{B}_{n,k+1}$ 且 $E(X_{n,k}|\mathscr{B}_{n,k})=0$,a. e. ,$1\leqslant k\leqslant N_n,n\geqslant 1$. 若对于某正数列 $\varepsilon_n\to 0$,有 $\|X_{n,k}\|\leqslant\varepsilon_n$,a. e. ,并且 $\sum_{k=1}^{N_n}\mathrm{Cov}[(X_{n,k},X_{n,k})|\mathscr{B}_{n,k-1}]\xrightarrow{p}Q$, 则

$$P(\sum_{k=1}^{N_n}X_{n,k}(r)<x_r,r=1,\cdots,s)\xrightarrow{w}G(x_1,\cdots,x_s),$$

其中 Q 是一非负定阵,$G(x_1,\cdots,x_s)$是 $N(0,Q)$的 d. f. .

证明 利用[6]的定理 2.3 和 Cramer-Wold 定理可证. 证毕.

定理 2.2 设 $F(u_{n,k})\to\lambda_k\in(0,1),k=1,\cdots,s,\lambda_1<\cdots<\lambda_s,m_n\to\infty(n\to\infty)$,$m_n$ 是正整数序列,且存在 $0<p<1$,使 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^p(n)<\infty$,则

$$P(\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{m_n}<x_k,k=1,\cdots,s)\xrightarrow{w}\Phi(x_1,\cdots,x_s), \tag{2.2}$$

其中 $\Phi(x_1,\cdots,x_s)$为 $N(0,\Sigma)$的 d. f. .

证明 令 $s_n=[m_n^{\frac{1}{4}}],t_n=\max(\sqrt{m_n}\alpha^{1-p}(s_n),m_n^{\frac{1}{3}}),N_n=[\frac{m_n}{t_n+s_n}]$,其中$[\cdot]$表示一个实数的整数部分. 记 $J_{n,k}=\{(k-1)(t_n+s_n)+1,\cdots,(k-1)(t_n+s_n)+t_n\},\widetilde{J}_{n,k}=\{(k-1)(t_n+s_n)+t_n+1,\cdots,k(t_n+s_n)\},k=1,\cdots,N_n,\overline{J}_n=\{N_n(t_n+s_n)+1,\cdots,m_n\},y_{n,k}(r)=\sum_{j\in J_{n,k}}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n},\widetilde{y}_{n,k}(r)=\sum_{i\in\widetilde{J}_{n,k}}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n},k=1,\cdots,N_n,\overline{y}_n(r)=\sum_{i\in\overline{J}_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n},r=1,\cdots,s$. 令 $\mathscr{B}_{n,k}=\mathscr{F}_1^{(k-1)(t_n+s_n)+t_n},1\leqslant k\leqslant N_n,\mathscr{B}_{n,0}=\{\varphi,\Omega\}$. $X_{n,k}(r)=y_{n,k}(r)-E(y_{n,k}(r)|\mathscr{B}_{n,k-1}),r=1,2,\cdots,s,X_{n,k}=(X_{n,k}(1),\cdots,X_{n,k}(s))^{\tau},y_{n,k}=(y_{n,k}(1),\cdots,y_{n,k}(s))^{\tau}$. 由[7]中引理 5.2,对 $r,l=1,\cdots,s$ 有

$$E|\sum_{k=1}^{N_n}E(X_{n,k}(r)X_{n,k}(l)|\mathscr{B}_{n,k-1})-\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(r)y_{n,k}(l)|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N_n}\sum_{i,j\in J_{n,k}}\{E|E(I_{n,i}(r)I_{n,j}(l)|\mathscr{B}_{n,k-1})-EI_{n,i}(r)I_{n,j}(l)|+$$

$$E|E(I_{n,i}(r)|\mathscr{B}_{n,k-1})-EI_{n,i}(r)|+E|E(I_{n,j}(l)|\mathscr{B}_{n,k-1})-EI_{n,j}(l)|\}/m_n$$

$$\leqslant 8N_n/m_n \sum_{j=1}^{t_n+s_n} j\alpha(j) + 4N_n(2t_n+1)/m_n \sum_{j=s_n+1}^{\infty} \alpha(j) \sim$$

$$\frac{8}{t_n+s_n} \sum_{j=1}^{t_n+s_n} j\alpha(j) + 4\,\frac{2t_n+1}{t_n+s_n} \sum_{j=s_n+1}^{\infty} \alpha(j) \to 0.$$

因此，有

$$\sum_{k=1}^{N_n} \mathrm{Cov}[(X_{n,k}, X_{n,k} \mid \mathscr{B}_{n,k-1}] - \sum_{k=1}^{N_n} \mathrm{Cov}(y_{n,k}, y_{n,k}) \xrightarrow{P} 0. \tag{2.3}$$

又由于

$$\sum_{k=1}^{N_n} E y_{n,k}(r) y_{n,k}(l) = \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{i,j \in J_{n,k}} [E I_{n,i}(r) I_{n,j}(l) - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})]/m_n$$

$$= N_n/m_n \sum_{i=1}^{t_n} \sum_{j=1}^{t_n} [P(X_i < u_{n,r}, X_j < u_{n,l}) - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})],$$

那么，对 $1 \leqslant r \leqslant l \leqslant s$ 有

$$\sum_{k=1}^{N_n} E y_{n,k}(r) y_{n,k}(l) = N_n/m_n \{ t_n F(u_{n,r})[1 - F(u_{n,l})] +$$

$$\sum_{j=1}^{t_n-1} (t_n - j)[P(X_1 < u_{n,r}, X_{j+1} < u_{n,l}) - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})] +$$

$$\sum_{j=1}^{t_n-1} (t_n - j)[P(X_1 < u_{n,l}, X_{j+1} < u_{n,r}) - F(u_{n,l}) F(u_{n,r})] \},$$

下面证明上式的极限是(2.1). 为此，只需证明

$$N_n/m_n \sum_{j=1}^{t_n-1} (t_n - j)[P(X_1 < u_{n,r}, X_{j+1} < u_{n,l}) - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})]$$

$$\to \sum_{j=1}^{\infty} [P(X_1 < a(\lambda_r), X_{j+1} < a(\lambda_l)) - \lambda_r \lambda_l]. \tag{2.4}$$

因为

$$|N_n/m_n \sum_{j=1}^{t_n-1} j[P(X_1 < u_{n,r}, X_{j+1} < u_{n,l}) - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})]|$$

$$\leqslant 1/t_n \sum_{j=1}^{t_n-1} j\alpha(j) = 1/t_n \sum_{i=1}^{t_n-1} \sum_{j=i}^{t_n-1} \alpha(j) \leqslant 1/t_n \sum_{i=1}^{t_n-1} [\sum_{j=i}^{\infty} \alpha(j)] \to 0,$$

又因为

$$T_n = | \sum_{j=1}^{t_n-1} [P(X_1 < u_{n,r}, X_{j+1} < u_{n,l}) - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})] -$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} [P(X_1 < a(\lambda_r), X_{j+1} < a(\lambda_l)) - \lambda_r \lambda_l] |$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{M} [|F(u_{n,r}) - \lambda_r| + |F(u_{n,l}) - \lambda_l|] + \sum_{j=1}^{M} |\lambda_r \lambda_l - F(u_{n,r}) F(u_{n,l})| + 2 \sum_{j=M+1}^{\infty} \alpha(j),$$

这里 M 是任一小于 $t_n - 1$ 的正整数. 令 $n \to \infty$，有

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} T_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} T_n \leqslant 2\sum_{j=M+1}^{\infty}\alpha(j).$$

再令 $M\to\infty$,则$\lim_{n\to\infty}T_n=0$,而 $N_n t_n/m_n\to 1$,故(2.4)成立.综上,得到$\sum_{k=1}^{N_n}Ey_{n,k}(r)y_{n,k}(l)\to\sigma_{rl}$,因此$\sum_{k=1}^{N_n}\mathrm{Cov}(y_{n,k},y_{n,k})\to\Sigma$,并由此看出 Σ 非负定.由(2.3)知$\sum_{k=1}^{N_n}\mathrm{Cov}[(X_{n,k},X_{n,k})|\mathscr{B}_{n,k-1}]\xrightarrow{P}\Sigma$,再由 $|X_{n,k}(r)|\leqslant 2t_n/\sqrt{m_n}\to 0$,得 $\|X_{n,k}\|\leqslant 2\sqrt{s}\,t_n/\sqrt{m_n}\to 0$.根据定理 2.1 得到

$$P\Big(\sum_{k=1}^{N_n}X_{n,k}(r)<x_r,r=1,\cdots,s\Big)\xrightarrow{w}\Phi(x_1,\cdots,x_s).$$

另一方面

$$E\Big|\sum_{k=1}^{N_n}X_{n,k}(r)-\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(r)\Big|\leqslant 1/\sqrt{m_n}\sum_{k=1}^{N_n}\sum_{i\in J_{n,k}}E|E(I_{n,i}(r)|\mathscr{B}_{n,k-1})-EI_{n,i}(r)|$$

$$\leqslant 4N_n/\sqrt{m_n}\sum_{j=1}^{t_n}\alpha(s_n+j)\leqslant 4\sqrt{m_n}/t_n\sum_{j=1}^{t_n}\alpha(s_n+j)$$

$$\leqslant 4\alpha^{\rho-1}(s_n)\sum_{j=1}^{t_n}\alpha(s_n+j)\leqslant 4\sum_{j=s_n+1}^{t_n+s_n}\alpha^{\rho}(j)\to 0$$

所以,$\Big(\sum_{k=1}^{N_n}X_{n,k}(1),\cdots,\sum_{k=1}^{N_n}X_{n,k}(s)\Big)^{\tau}-\Big(\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(1),\cdots,\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(s)\Big)^{\tau}\xrightarrow{P}0$,从而 $P\Big(\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(r)<x_r,r=1,\cdots,s\Big)\xrightarrow{w}\Phi(x_1,\cdots,x_s)$.类似地可以证明,$\Big(\sum_{k=1}^{N_n}\tilde{y}_{n,k}(1),\cdots,\sum_{k=1}^{N_n}\tilde{y}_{n,k}(s)\Big)^{\tau}\xrightarrow{d}0$,且易知,$|\bar{y}_n(r)|\leqslant 2(t_n+s_n)/\sqrt{m_n}\to 0,r=1,\cdots,s$.但是

$$\Big(\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(1)-F(u_{n,1})]/\sqrt{m_n},\cdots,\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(s)-F(u_{n,s})]/\sqrt{m_n}\Big)^{\tau}$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(1),\cdots,\sum_{k=1}^{N_n}y_{n,k}(s)\Big)^{\tau}+\Big(\sum_{k=1}^{N_n}\tilde{y}_{n,k}(1),\cdots,\sum_{k=1}^{N_n}\tilde{y}_{n,k}(s)\Big)^{\tau}+(\bar{y}_n(1),\cdots,\bar{y}_n(s))^{\tau}.$$

故(2.2)成立.证毕.

3 主要结果

引理 3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$中事件$\{A_n,n\geqslant 1\}$满足

i) 对任何正整数 $n\geqslant 1$,$P(A_n)>0$;

ii) 对任何固定的正整数 $m\geqslant 1$.有$\lim_{n\to\infty}P(A_n|A_m)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)=a$,$a\in(0,1)$,则对任意事件 $A\in\mathscr{F}$,有$\lim_{n\to\infty}P(A_n\cap A)=aP(A)$.

证明 见[8]命题 8.2.2.证毕.

定理 3.1 设 $F(u_{n,k})\to\lambda_k,k=1,2,\cdots,s,m_n\to\infty(n\to\infty)$,$m_n$ 为正整数列,$0<\lambda_1<\cdots<\lambda_s<$

1,且存在 $0<p<1$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^p(n)<\infty$,则对任意的事件 $A\in\mathscr{F}$,有

$$P(\{\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{m_n}<x_k,k=1,\cdots,s\}\cap A)\to\Phi(x_1,\cdots,x_s)P(A).\tag{3.1}$$

证明 令 $A_n=\{\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}<x_r,r=1,\cdots,s\}$,对任意正整数 k,t,

$$A_n=\{\sum_{i=m_k+t}^{m_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}+\sum_{i=1}^{m_k+t-1}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}<x_r,r=1,\cdots,s\},$$

因为 $\sum_{i=1}^{m_k+t-1}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}\to0$,a. e. ,$r=1,\cdots,s$,所以对任意的 $\varepsilon>0$ 和充分大的 n,有

$$\begin{aligned}P(A_n\cap A_k)&\leqslant P(\{\sum_{i=m_k+t}^{m_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}<x_r+\varepsilon,r=1,\cdots,s\}\cap A_k)\\&\leqslant P(\sum_{i=m_k+t}^{m_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}<x_r+\varepsilon,r=1,\cdots,s)P(A_k)+\alpha(t)\\&=P(\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}-\sum_{i=1}^{m_k+t-1}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\\&\quad\sqrt{m_n}<x_r+\varepsilon,r=1.\cdots,s)P(A_k)+\alpha(t).\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}P(A_n\cap A_k)\geqslant P(&\sum_{i=1}^{m_n}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}-\sum_{i=1}^{m_k+t-1}[I_{n,i}(r)-F(u_{n,r})]/\sqrt{m_n}\\&<x_r-\varepsilon,r=1,\cdots,s)P(A_k)-\alpha(t),\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,由定理 2.2 得 $\Phi(x_1-\varepsilon,\cdots,x_s-\varepsilon)P(A_k)-\alpha(t)\leqslant\liminf_{n\to\infty}P(A_n\cap A_k)\leqslant\limsup_{n\to\infty}P(A_n\cap A_k)\leqslant\Phi(x_1+\varepsilon,\cdots,x_s+\varepsilon)P(A_k)+\alpha(t)$,再令 $\varepsilon\to0,t\to\infty$ 得 $\lim_{n\to\infty}P(A_n\cap A_k)=\Phi(x_1,\cdots,x_s)P(A_k)$,从而 $\lim_{n\to\infty}P(A_n|A_k)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$. 根据引理 3.1 知,对任意的 $A\in\mathscr{F}$,$\lim_{n\to\infty}P(A_n\cap A)=P(A)\lim_{n\to\infty}P(A_n)$,即(3.1)成立. 证毕.

以下记 $\{M_n\}$ 和 $\{N_n(k)\}$,$k=1,\cdots,s$ 是正整值 r. v. 序列,且假定 $1\leqslant N_n(k)\leqslant M_n$,a. e. ,$k=1,\cdots,s$.

定理 3.2 设 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 是平稳序列,X 为一正离散 r. v, $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_s<1$,存在 $0<p<1$,使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^p(n)<\infty$,且

$$\sqrt{n}(M_n/n-X)\xrightarrow{P}0\tag{3.2}$$

$$\sqrt{n}(N_n(k)/n-\lambda_kX)\xrightarrow{P}Y_k,k=1,\cdots,s.\tag{3.3}$$

其中 Y_k,$k=1,\cdots,s$ 是离散 r. v. 若

$$W_{n,k}(x)=\sqrt{n}[F(a_{n,k}x+b_{n,k})-\lambda_k]\xrightarrow{w}W_k(x).\tag{3.4}$$

这里 $W_k(x)$ 是拟分布函数，$W_k(+\infty)=+\infty$，$W_k(-\infty)=-\infty$，并存在 $x_k\in R$，使 $W_k(x_k)\in R$，$k=1,\cdots,s$. 则

$$P(X_{N_n(k)}^{(M_n)}>a_{n,k}x_k+b_{n,k},k=1,\cdots,s)$$

$$\xrightarrow{w}E[\Phi(Y_1/\sqrt{X}-W_1(x_1)\sqrt{X},\cdots,Y_s/\sqrt{X}-W_s(X_s)\sqrt{X})],\qquad(3.5)$$

此时，$W_k(x)$，$k=1,\cdots,s$ 是[2]的引言中指出的四种类型之一.

证明 令 X 取值于 $\{l_i,i\geqslant1\}$，Y_k 取值于 $\{y_{i_k}^{(k)},i_k\geqslant1\}$，$k=1,\cdots s$. 并令 $H(x_1,\cdots,x_s)=E[\Phi(Y_1/\sqrt{X}-W_1(x_1)\sqrt{X},\cdots,Y_s/\sqrt{X}-W_s(x_s)\sqrt{X})]$. 因为

$$P(X_{N_n(k)}^{(M_n)}>u_{n,k},k=1,\cdots,s)=P(\sum_{i=1}^{M_n}I_{n,i}(k)<N_n(k),k=1,\cdots,s)$$

$$=P(\sum_{i=1}^{[nX]}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{nX}+\sum_{i=1}^{M_n}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{nX}-$$

$$\sum_{i=1}^{[nX]}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{nX}<-\sqrt{n}[F(u_{n,k})-\lambda_k]\sqrt{X}+$$

$$\sqrt{n}(N_n(k)/n-\lambda_kX)/\sqrt{X}-\sqrt{n}(M_n/n-X)F(u_{n,k})/\sqrt{X},k=1,\cdots,s),$$

又由(3.2)知 $\sqrt{n}(M_n/n-X)F(u_{n,k})/\sqrt{X}\xrightarrow{P}0$ 和 $\sum_{i=1}^{M_n}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{nX}-\sum_{i=1}^{[nX]}[I_{n,i}(k)-F(u_{n,k})]/\sqrt{nX}\xrightarrow{P}0$，$k=1,\cdots,s$. 那么，当 $w_k(x_k)$ 有限，且 $x_k\in C(w_k)$（$C(w_k)$ 表示 w_k 的全体连续点的集合），$k=1,\cdots,s$，此时显然有 $F(u_{n,k})\to\lambda_k$，$k=1,\cdots,s$，则由定理 3.1 和(3.3)以及控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}P(X_{N_n(k)}^{(M_n)}>u_{n,k},k=1,\cdots,s)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_s=1}^{\infty}\Phi(y_{i_1}^{(1)}/\sqrt{l_j}-w_1(x_1)\sqrt{l_j},\cdots,y_{i_s}^{(s)}/\sqrt{l_j}-w_s(x_s)\sqrt{l_j})\times$$

$$P(X=l_j,Y_k=y_{i_k}^{(k)},k=1,\cdots,s)$$

$$=E[\Phi(Y_1/\sqrt{X}-w_1(x_1)\sqrt{X},\cdots,Y_s/\sqrt{X}-w_s(x_s)\sqrt{X})].$$

当 $w_1(x_1),\cdots,w_s(x_s)$ 中至少有一个为 $+\infty$ 时，不妨设 $w_1(x_1)=+\infty$，且 $x_1\in C(w_1)$，那么对任何 $x_2,\cdots,x_s\in R$ 有

$$0\leqslant P(X_{N_n(k)}^{(M_n)}>u_{n,k},k=1,\cdots,s)\leqslant P(X_{N_n(1)}^{(M_n)}>u_{n,1}),$$

不难证明 $P(X_{N_n(1)}^{(M_n)}>u_{n,1})\to0$，参见[5]. 所以

$$P(X_{N_n(k)}^{(M_n)}>u_{n,k},k=1,\cdots,s)\to0=E[\Phi(Y_1/\sqrt{X}-w_1(x_1)\sqrt{X},\cdots,Y_s/\sqrt{X}-w_s(x_s)\sqrt{X})].$$

当存在 m 个 $w_k(x_k)$，使 $w_k(x_k)=-\infty$，$1\leqslant m\leqslant s$，不妨设 $w_1(x_1)=\cdots=w_m(x_m)=-\infty$，且 $x_k\in C(w_k)$，$k=1,\cdots,s$. 因为 $w_{m+1}(x_{m+1}),\cdots,w_s(x_s)$ 有限，那么重复本定理第一部分的证明过程，有

$$P(X_{N_n(k)}^{(M_n)}>u_{n,k},k=m+1,\cdots,s)\to E[\Phi(+\infty,\cdots,+\infty,Y_{m+1}/\sqrt{X}-w_{m+1}(x_{m+1})\sqrt{X},$$

$$\cdots,Y_s/\sqrt{X}-w_s(x_s)\sqrt{X})],\qquad(3.6)$$

故只须证明

$$P(X_{N_n(k)}^{(M_n)} > u_{n,k}, k = 1, \cdots, m) \to 1, \tag{3.7}$$

不难证明 $P(X_{N_n(k)}^{(M_n)} > u_{n,k}) \to 1, k=1,\cdots,m$，参见[5]. 这说明(3.7)成立. 再由(3.6)可得

$$\begin{aligned} & P(X_{N_n(k)}^{(M_n)} > u_{n,k}, k=1,\cdots,s) \\ & \to E[\Phi(+\infty,\cdots,+\infty, Y_{m+1}/\sqrt{X} - w_{m+1}(x_{m+1})\sqrt{X}, \cdots, Y_s/\sqrt{X} - w_s(x_s)\sqrt{X})] \\ & = E[\Phi(Y_1/\sqrt{X} - w_1(x_1)\sqrt{X}, \cdots, Y_s/\sqrt{X} - w_s(x_s)\sqrt{X})]. \end{aligned}$$

综上，对任何 $(x_1,\cdots,x_s) \in C(H)$（其中 $C(H)$ 表示 $H(x_1,\cdots,x_s)$ 的全体连续点的集合），有

$$P(X_{N_n(k)}^{(M_n)} > u_{n,k}, k=1,\cdots,s) \to E[\Phi(Y_1/\sqrt{X} - w_1(x_1)\sqrt{X}, \cdots, Y_s/\sqrt{X} - w_s(x_s)\sqrt{X})].$$

参 考 文 献

[1] H. B. 斯米尔诺夫，王寿仁译. 变叙项的极限分布律 [M]. 北京：科学出版社，1954.

[2] 程士宏. 关于平稳序列次序统计量中项的极限分布 [J]. 北京大学学报，自然科学版，1980，4：14—30.

[3] Cheng S. *On limiting distributions of order statistics with variable ranks from stationary sequences* [J]. Ann. Probab. 1985, 13(4): 1326—1340.

[4] 王晓明. 平稳随机序列的变秩顺序统计量的联合渐近分布 [J]. 应用概率统计，1992，8：42—49.

[5] 张国胜. 强混合平稳序列的随机容量、随机秩顺序统计量的极限分布 [J]. 应用数学学报，1993，16：230—242.

[6] Durrett R, Resnick S I. *Functional limit theorems for dependent variable* [J]. Ann. Probab. 1978, 6: 829—846.

[7] Dvoretzky A. *Asymptotic normality for sums of dependent random variables* [J]. Proc. Sixth. Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1972, 2: 513—535.

[8] Rao M M. *Probability theory with applications* [M]. Academic. Press. New York, 1984, 442—455.

Joint Asymptotic Distributions of Several Order Statistics with Random Sample Size and Random Central Ranks From Stationary

WANG Xiao-ming

(Dalian Naval Academy, Dalian 116013)

Abstract: Let $\{X_n\}$ be a stationary sequence and $X_1^{(n)} \leqslant \cdots \leqslant X_n^{(n)}$ the order statistics of $X_1, \cdots, X_n$. In this paper, we obtain the limiting distributions of $\{(X_{N_n(1)}^{(M_n)}, \cdots, X_{N_n(s)}^{(M_n)})\}$ under strong miximg conditions, where M_n is the random size, and $N_n(k), k = 1,\cdots,s$ are random central ranks.

Key words: stationary sequence; random size; random central ranks.