第19卷第3期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 3
1999年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1999

循环图的连通度*

李唐芬
(国家科技部西南信息中心，重庆 400013)

摘　要：设 $G=C_n\langle i_1,i_2,\cdots,i_r\rangle$ 是连通循环图，且 $\kappa(G)<\delta(G)$. 本文得到了其连通度的明确表达式：$\kappa(G)=\min\{m|M(\frac{n}{m},K)|;m$ 是 n 的真因子，且 $|M(\frac{n}{m},K)|<\frac{n}{m}-1\}$.

关键词：循环图；连通度；原子部分.
分类号：AMS(1991) 05C30/CLC O157.5
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0608-03

1 引言

循环图的连通性在构造可靠网络等方面具有很重要的意义. 对它的研究，目前取得了一定成果. Boesch 和 Tindell[1] 得到了循环图连通的充要条件，以及连通循环图的连通度小于其顶点度的充要条件. 本文对其连通度小于其顶点度的循环图作了进一步探讨，得到了该类循环图连通度的明确表达式.

本文中原子部分的概念同文[2]. 循环图 $G=C_n\langle i_1,i_2,\cdots,i_r\rangle$ 的顶点集 $V(G)=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$；$\delta(G)$ 表示 G 的顶点度；m 是 n 的真因子，由顶点集 $\{0,\frac{n}{m},\frac{2n}{m},\cdots,(m-1)\frac{n}{m}\}$ 生成 G 的导出子图记为 G_m，G_m 的邻集记为 $N(G_m)$；$K=\{i_1,i_2,\cdots,i_r,n-i_1,n-i_2,\cdots,n-i_r\}$，$M(r,K)=\{j:1\leqslant j<r;j=k(\mathrm{mod}\, r),k\in K\}$.

2 引理

引理 1[2]　设 $G=C_n\langle i_1,i_2,\cdots,i_r\rangle$ 是连通循环图，且 $\kappa(G)<\delta(G)$，P 是 G 的一个原子部分，$|V(P)|=s$，则 G 有 $\frac{n}{s}$ 个原子部分，且这 $\frac{n}{s}$ 个原子部分都是相互同构的循环图，其顶点标号为

$$\{h,h+\frac{n}{s},h+\frac{2n}{s},\cdots,h+(s-1)\frac{n}{s}\}\ (h=0,1,2,\cdots,\frac{n}{s}-1).$$

引理 2[1]　连通循环图 $G=C_n\langle i_1,i_2,\cdots,i_r\rangle$ 满足 $\kappa(G)<\delta(G)$ 的充要条件是：存在 n 的一个真因子 m 使得 $|M(m,K)|<\min\{m-1,m\delta(G)/n\}$.

* 收稿日期：1996-09-02；修订日期：1998-01-05
作者简介：李唐芬(1966-)，女，重庆市人，硕士，馆员.

引理 3 连通循环图 $G=C_n\langle i_1,i_2,\cdots,i_r\rangle$，$m$ 是 n 的真因子，则有

$$|N(G_m)|=m\left|M\left(\frac{n}{m},K\right)\right|.$$

证明 不妨设 $M(\frac{n}{m},K)=\{j_1,j_2,\cdots,j_a\}$. 对任意 $j_l\in M(\frac{n}{m},K)(1\leqslant l\leqslant a)$，都存在 $k\in K$，使得 $j_l=k(\bmod \frac{n}{m})$，即 $k=\frac{tn}{m}+j_l$，$t\in N$（N 为自然数集）$\Rightarrow j_l=k-\frac{tn}{m}$.

首先证明 $N(G_m)=\{g\frac{n}{m}+j_l\}(g=0,1,2,\cdots,m-1,l=1,2,\cdots,a)$.

集合 $\{g\frac{n}{m}+j_l\}(g=0,1,2,\cdots,m-1,l=1,2,\cdots,a)$ 中任意一项点 $g\frac{n}{m}+j_l$，$g\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，$l\in\{1,2,\cdots,a\}$，有

$$g\frac{n}{m}+j_l=g\frac{n}{m}+\left(k-\frac{tn}{m}\right)=(g-t)\frac{n}{m}+k_0.$$

存在顶点 $(g-t)\frac{n}{m}(\bmod n)\in V(G_m)$，有

$$(g-t)\frac{n}{m}+k-(g-t)\frac{n}{m}=k\in K.$$

因此，顶点 $g\frac{n}{m}+j_l$ 与顶点 $(g-t)\frac{n}{m}$ 相邻接，即是说 $g\frac{n}{m}+j_l\in N(G_m)$. 由 $g\frac{n}{m}+j_l$ 的任意性得：

$$\{g\frac{n}{m}+j_l\}\subseteq N(G_m)(g=0,1,2,\cdots,m-1,l=1,2,\cdots,a).$$

对任意顶点 $x\in N(G_m)$，存在顶点 $i\frac{n}{m}\in V(G_m)(i\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，顶点 $i\frac{n}{m}$ 与顶点 x 相邻接，故 $i\frac{n}{m}-x=\pm k(k\in K)\Rightarrow x=i\frac{n}{m}\pm k$，则 $x(\bmod\frac{n}{m})\in M(\frac{n}{m},K)$，从而 $x\in\{g\frac{n}{m}+j_l\}$ $(g=0,1,2,\cdots,m-1,l=1,2,\cdots,a)$. 由 x 的任意性得：

$$N(G_m)\subseteq\{g\frac{n}{m}+j_l\}(g=0,1,2,\cdots,m-1,l=1,2,\cdots,a).$$

综上可得 $N(G_m)=\{g\frac{n}{m}+j_l\}(g=0,1,2,\cdots,m-1,l=1,2,\cdots,a)$.

显然有 $|N(G_m)|=ma=m|M(\frac{n}{m},K)|$. 引理得证.

3 定理及证明

定理 连通循环图 $G=C_n\langle i_1,i_2,\cdots,i_r\rangle$，若 $\kappa(G)<\delta(G)$，则

$$\kappa(G)=\min\left\{m\left|M\left(\frac{n}{m},K\right)\right|:m\text{ 是 }n\text{ 的真因子，且}\left|M\left(\frac{n}{m},K\right)\right|<\frac{n}{m}-1\right\}.$$

证明 设 G 有一个原子部分 P，且 $|V(P)|=s$. 由引理 1，s 是 n 的一个真因子，且可设 $V(P)=\{0,\frac{n}{s},\frac{2n}{s},\cdots,(s-1)\frac{n}{s}\}$. 因此 $P=G_s$，$\kappa(G)=|N(P)|=|N(G_s)|$ 且 $|V(G_s)|+|N(G_s)|<n$. 再由引理 3 知 $|N(G_s)|=s|M(\frac{n}{s},K)|$，所以

$$s + s|M(\frac{n}{s}, K)| < n \Rightarrow |M(\frac{n}{s}, K)| < \frac{n}{s} - 1.$$

从而得到$\kappa(G) = |N(G_s)| = s|M(\frac{n}{s}, K)| \geqslant \min\{m|M(\frac{n}{m}, K)| : m$ 是n的真因子,且 $|M(\frac{n}{m}, K)| < \frac{n}{m} - 1\}$.

首先证明存在n的一个真因子c,使得 $|M(\frac{n}{c}, K)| < \frac{n}{c} - 1$. 否则,对于$n$的任意一个真因子$a$,皆有 $|M(\frac{n}{a}, K)| \geqslant \frac{n}{a} - 1$. 显然,$|M(\frac{n}{a}, K)| \geqslant \min(\frac{n}{a} - 1, \frac{n}{a} \cdot \frac{\delta(G)}{n})$. 由引理 2 可得$\kappa(G) = \delta(G)$,这与已知条件$\kappa(G) < \delta(G)$矛盾. 于是,不妨假设存在$n$的一个真因子$b$,满足 $|M(\frac{n}{b}, K)| < \frac{n}{b} - 1$,且$b|M(\frac{n}{b}, K)| = \min\{m|M(\frac{n}{m}, K)| : m$ 是n的真因子,且 $|M(\frac{n}{m}, K)| < \frac{n}{m} - 1\}$. 由 $|M(\frac{n}{b}, K)| < \frac{n}{b} - 1$,可知$b + b|M(\frac{n}{b}, K)| < n$,又由引理 3 得 $|V(G_b)| + |N(G_b)| < n$. 因此,$N(G_b)$是G的一个割集. 从而得到$\kappa(G) \leqslant |N(G_b)| = b|M(\frac{n}{b}, K)| = \min\{m|M(\frac{n}{m}, K)| : m$ 是n的真因子,且 $|M(\frac{n}{m}, K)| < \frac{n}{m} - 1\}$.

综上可得 $\kappa(G) = \min\{m|M(\frac{n}{m}, K)| : m$ 是n的真因子,且 $|M(\frac{n}{m}, K)| < \frac{n}{m} - 1\}$. 定理得证.

参 考 文 献

[1] Boesch F and Tindell R. *Circulants and their connectivities* [J]. Journal of Graph Theory, 1984, **8**: 487—499.

[2] 周永生,李唐芬. 一些可靠通讯网络的构造 [J]. 甘肃工业大学学报, 1990, **16**(2): 82—90.

Connectivity of Circulant Graphs

LI Tang-fen

(Southwest Information Centre, State Science and Technology Commission of China, Chongqing 400013)

Abstract: In this paper, an explicit expression is derived for the connectivity of a connected circulant graph whose connectivity is less than its point degree, that is $\kappa(G) = \min\{m|M(\frac{n}{m}, K)| : m$ is a proper divisor of n and $|M(\frac{n}{m}, K)| < \frac{n}{m} - 1\}$.

Key words: circulant graph; connectivity; atomic part.