关于局部对称空间中的伪脐子流形*

宋卫东
(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)

摘　要:本文讨论了局部对称完备黎曼流形中的紧致伪脐子流形,且具有平行平均曲率向量场。得到了这类子流形成为全脐子流形及其余维数减小的几个拼挤定理。

关键词:局部对称;全脐子流形;平行平均曲率向量场.
分类号:AMS(1991) 53B20,53B25/CLC O186.12
文献标识码:A　　**文章编号**:1000-341X(1999)03-0611-06

1　预备知识

设 M^n 是 $n+p$ 维黎曼流形 N^{n+p} 中 n 维子流形. 在 N^{n+p} 上选取局部标准正交标架 $e_1,\cdots,e_{n+p}$,使得其限制于 M^n 时,$e_1,\cdots,e_n$ 与 M^n 相切. 令 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 是上述标架的对偶标架,并约定各类指标的取值范围

$$1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant n+p;1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n,$$
$$n+1\leqslant\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n+p,$$

则限制在 M^n 上,有[1]

$$\omega_\alpha=0,\omega_{\alpha,i}=\sum_j h_{ij}^\alpha\omega_j,h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha, \tag{1.1}$$

$$h=\sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^\alpha\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha, \tag{1.2}$$

$$\xi=\frac{1}{n}\sum_\alpha(\sum_i h_{ii}^\alpha)e_\alpha, \tag{1.3}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+\sum_\alpha(h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha-h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha), \tag{1.4}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=K_{\alpha\beta kl}+\sum_i(h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta-h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta), \tag{1.5}$$

式中 h、ξ、R_{ijkl}、$R_{\alpha\beta kl}$ 及 K_{ABCD} 分别是 M^n 的第二基本形式、平均曲率向量场、曲率张量场、法曲率张量场及 N^{n+p} 的曲率张量场,定义

$$S=\|h\|^2,H=\|\xi\|,H_\alpha=(h_{ij}^\alpha)_{n\times n},$$

如果 $\nabla^\perp\xi=0$,称 M^n 具有平行平均曲率向量场,若选取 e_{n+1} 与 ξ 的方向重合,则

* 收稿日期:1997-07-02
作者简介:宋卫东(1958-),男,安徽人,安徽师范大学副教授.

$$t_r H_\alpha = \sum_i h_{ii}^\alpha = 0, (\alpha \neq n+p), \tag{1.6}$$

$$t_r H_{n+p} = \sum_i h_{ii}^{n+p} = nH. \tag{1.7}$$

如果 e_{n+p} 在法丛中平行，则[1]

$$H = \text{常数}, \omega_{\alpha, n+p} = 0, R_{\alpha n+pkl} = 0, \forall \alpha, \tag{1.8}$$

且有

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij}^\alpha &= -\sum_k (K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}) \\ &= \sum_{k,m} (h_{mk}^\alpha R_{mijk} + h_{mi}^\alpha R_{mkjk}) - \sum_{\beta,k} h_{ki}^\beta R_{\alpha\beta jk}, (\alpha \neq n+p), \end{aligned} \tag{1.9}$$

式中 $\Delta h_{ij}^\alpha = \sum_k h_{ijkk}^\alpha$ 为 h_{ij}^α 的 Laplacian，h_{ijkl}^α、$K_{ABCD,E}$ 分别是 h_{ij}^α 及 K_{ABCD} 的共变导数[1].

若 N^{n+p} 是局部对称的，应用[1]中公式(2.17)结合(1.5)、(1.6)，经计算

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha = & \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k} (4K_{\alpha\beta ij} h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta - K_{\alpha k\beta k} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta) + \\ & \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k} h_{ij}^\alpha (h_{mk}^\alpha R_{mijk} + h_{mi}^\alpha R_{mkjk}) + \\ & \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k} h_{ij}^\alpha (h_{mk}^\alpha K_{mijk} + h_{mi}^\alpha K_{mkjk}) + \\ & \sum_{\alpha,\beta \neq n+p} [t_r (H_\alpha H_\beta)^2 - t_r (H_\alpha^2 H_\beta^2)], \end{aligned} \tag{1.10}$$

若 M^n 又是伪脐的，即

$$h_{ij}^{n+p} = H \delta_{ij}, \tag{1.11}$$

则

$$\sum_{\alpha,\beta \neq n+p} (t_r H_\beta)[t_r (H_\alpha H_\beta H_\alpha)] = nH^2 \tau, \tag{1.12}$$

其中

$$\tau = S - t_r H_{n+p}^2 = \sum_{\alpha \neq n+p} t_r H_\alpha^2 \geqslant 0. \tag{1.13}$$

由(1.11)，(1.13)

$$\tau = S - nH^2 \tag{1.14}$$

又矩阵 $(t_r H_\alpha H_\beta)$ 是 $(p-1)$ 阶实对称矩阵，故可选取 $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p-1}$，使它成为对角型，即

$$\sum_{\alpha,\beta \neq n+p} [t_r (H_\alpha H_\beta)]^2 = \sum_{\alpha \neq n+p} (t_r H_\alpha^2)^2, \tag{1.15}$$

于是由(1.10)、(1.4)、(1.13)、(1.15)，应用[1]的技巧，对于任何实数 a，有

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha = & \sum_{\alpha,\beta \neq n+p} \sum_{i,j,k} (4K_{\alpha\beta ij} h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta - K_{\alpha k\beta k} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta) + \\ & (1+a) \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^\alpha (h_{mk}^\alpha R_{mijk} + h_{mi}^\alpha R_{mkjk}) + \\ & (1-a) \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^\alpha (h_{mk}^\alpha K_{mijk} + h_{mi}^\alpha K_{mkjk}) + \\ & (1-a) \sum_{\alpha,\beta \neq n+p} [t_r (H_\alpha H_\beta)^2 - t_r (H_\alpha^2 H_\beta^2)] + \end{aligned}$$

$$a\sum_{\alpha\neq n+p}(t_rH_\alpha^2)^2-anH^2\tau. \tag{1.16}$$

引理1[2] 设 M^n 是 N^{n+p} 中的 n 维黎曼流形，τ 由(1.13)定义，则

(1) $$\tau^2\geqslant\sum_{\alpha\neq n+p}(t_rH_\alpha^2)^2\geqslant\frac{1}{p-1}\tau^2 \tag{1.17}$$

(2) $$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[t_r(H_\alpha^2H_\beta^2)-t_r(H_\alpha H_\beta)^2]\leqslant\frac{p-2}{p-1}\tau^2,\quad(p\geqslant 2). \tag{1.18}$$

引理2[3] 设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维黎曼流形，其截面曲率 K_N 满足 $\delta\leqslant K_N\leqslant 1$，则

(1) $|K_{ACBC}|\leqslant\frac{1}{2}(1-\delta)$，$A$，$B$ 互相不同； (1.19)

(2) $|K_{ABCD}|\leqslant\frac{2}{3}(1-\delta)$，$A$、$B$、$C$、$D$ 互不相同. (1.20)

2 关于截面曲率的 Pinching

以 N^{n+p} 表示其截面曲率 K_N 满足条件 $\delta\leqslant K_N\leqslant 1$ 的 $n+p$ $(p\geqslant 2)$ 维局部对称完备的黎曼流形，M^n 是 N^{n+p} 中的紧致伪脐子流形，且具有平行平均曲率向量场，对于固定的 α，令 $h_{ij}^\alpha=\lambda_i^\alpha\delta_{ij}$，由引理2

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}4K_{\alpha\beta ij}h_{ik}^\alpha h_{ik}^\beta&=4\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{i,k}K_{\alpha\beta ik}\lambda_k^\alpha h_{ik}^\beta\geqslant-4\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\frac{2}{3}(1-\delta)\sum_{i\neq k}|\lambda_k^\alpha|\cdot|h_{ik}^\beta|\\
&\geqslant-\frac{4}{3}(1-\delta)\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_{i\neq k}[(n-1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_k^\alpha)^2+(n-1)^{\frac{1}{2}}(h_{ik}^\beta)^2]\\
&=-\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}(p-2)t_rH_\alpha^2-\\
&\quad\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}t_rH_\beta^2\end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}4K_{\alpha\beta ij}h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta\geqslant-\frac{8}{3}(1-\delta)(p-2)(n-1)^{\frac{1}{2}}\tau, \tag{2.1}$$

再由引理2及(1.15)

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}K_{\alpha k\beta k}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta&=\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_{i,j,k}K_{\alpha k\beta k}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta+\sum_{i,j,k}K_{\alpha k\alpha k}(h_{ij}^\alpha)^2\\
&\leqslant\frac{1}{2}(1-\delta)n\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}t_r(H_\alpha H_\beta)+nt_rH_\alpha^2=nt_rH_\alpha^2\end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}K_{\alpha k\beta k}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\leqslant n\tau. \tag{2.2}$$

另外，由(1.6)

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk}+h_{mi}^\alpha K_{mkjk})=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)^2K_{ijij}\geqslant n\delta\tau, \tag{2.3}$$

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk}+h_{mi}^\alpha R_{mkjk})=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)^2R_{ijij}\geqslant nR_c\tau, \tag{2.4}$$

式中 R_c 是 M^n 截面曲率在每一点处的下确界.

于是，对于任何实数$0<a<1$，由(1.16)—(1.18)，(2.1)—(2.4)

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant-\frac{8}{3}(1-\delta)(p-2)(n-1)^{\frac{1}{2}}\tau-$$
$$n\tau+(1+a)nR_c\tau+(1-a)n\delta\tau+$$
$$\frac{1}{p-1}[a(p-1)-(p-2)]\tau^2-anH^2\tau.$$

令$a=\frac{p-2}{p-1}$，则

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\frac{2p-3}{p-1}n\tau\{R_c-\frac{1}{2p-3}[(p-1)-\delta+(p-2)H^2+$$
$$\frac{8}{3n}(1-\delta)(p-2)(p-1)(n-1)^{\frac{1}{2}}]\}. \tag{2.5}$$

已知

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha},$$

当(2.5)中花括号大于零时，由Hopf极大原理，τ为常数，从而$\tau=0$，即

$$h_{ij}^{\alpha}=0,\forall\ i,j,\alpha\neq n+p.$$

由(1.11)知，对于每个$H_\alpha=(h_{ij}^{\alpha})$，其特征值均相等，即$M^n$中$N^{n+p}$的全脐子流形，且$M^n$关于其子法丛$N_1=\xi^{\perp}$是全测地的，因此利用[1]的定理1，得到

定理1 设M^n是$N^{n+p}(p\geqslant2)$中的紧致伪脐子流形，且具有平行平均曲率向量场，如果M^n在任一点的截面曲率均大于

$$\frac{1}{2p-3}[(p-1)-\delta+(p-2)H^2+\frac{8}{3n}(1-\delta)(p-1)(p-2)\sqrt{n-1}],$$

则M^n一定是N^{n+p}是某个$n+1$维全测地子流形的全脐点超曲面.

3 关于第二基本形式模长平方的Pinching

定理2 在定理1的同样条件下，当M^n的第二基本形式的模长平方S小于

$$\frac{n}{3p-5}[(2\delta-1)(p-1)+(4p-6)H^2-\frac{8}{3n}(1-\delta)(p-1)(p-2)\sqrt{n-1}],$$

则M_n一定是N^{n+p}中某个$n+1$维全测地子流形的全脐点超曲面.

证明 在(1.16)中，令$a=-1$，由(2.1)、(2.2)、(2.3)、(1.14)及引理1

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}(4K_{\alpha\beta ij}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}-K_{\alpha k\beta k}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})+$$
$$2\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})+$$
$$2\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j}[t_r(H_\alpha H_\beta)^2-t_r(H_\alpha^2H_\beta^2)]-\sum_{\alpha\neq n+p}(t_rH_\alpha^2)^2+nH^2\tau$$
$$\geqslant\frac{3p-5}{p-1}\tau\{\frac{n}{3p-5}[(2\delta-1)(p-1)+(4p-6)H^2-$$

$$\frac{8}{3n}(1-\delta)(p-1)(p-2)(n-1)^{\frac{1}{2}}]-S\}.$$

而 $\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}+\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2$，根据定理2的假设，同定理1的一样论证，$M^n$ 一定是 N^{n+p} 中某 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

4 关于 Ricci 曲率的 Pinching

首先，对于固定的 $\alpha\neq n+p$，令 $h_{ij}^{\alpha}=\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$.

因为 $(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2\leqslant 2[(\lambda_i^{\alpha})^2+(\lambda_j^{\alpha})^2]$，故

$$\sum_{\beta\neq n+p}[t_r(H_\alpha^2H_\beta^2)-t_r(H_\alpha H_\beta)^2]=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\beta})^2(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2$$

$$\leqslant 2\sum_i[\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_j(h_{ij}^{\beta})^2](\lambda_i^{\alpha})^2. \tag{4.1}$$

另一方面，令 Q 表示 M^n 的 Ricci 曲率在每一点沿各方向的下确界，由(1.11)、(4.1)及条件 $\delta\leqslant K_N\leqslant 1$，

$$Q\leqslant R_{ii}=\sum_{j(\neq i)}R_{ijij}=\sum_{j(\neq i)}K_{ijij}+\sum_{\beta,j}[h_{ii}^{\beta}h_{jj}^{\beta}-(h_{ij}^{\beta})^2]$$

$$=\sum_{j(\neq i)}K_{ijij}+h_{ii}^{n+p}\sum_{j(\neq i)}h_{jj}^{n+p}-\sum_{j(\neq i)}(h_{ij}^{n+p})^2-(\lambda_i^{\alpha})^2-\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_j(h_{ij}^{\beta})^2$$

$$\leqslant(n-1)(1+H^2)-(\lambda_i^{\alpha})^2-\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_j(h_{ij}^{\beta})^2,$$

从而

$$\sum_{\substack{\beta\neq n+p\\ \beta(\neq\alpha)}}\sum_j(h_{ij}^{\beta})^2\leqslant(n-1)(1+H^2)-(\lambda_i^{\alpha})^2-Q, \tag{4.2}$$

关于 i 求和得

$$\tau\leqslant n(n-1)(1+H^2)-nQ. \tag{4.3}$$

由(4.1)，(4.2)及 $\sum_i(\lambda_i^{\alpha})^4\geqslant\frac{1}{n}[\sum_i(\lambda_i^{\alpha})^2]^2$，

$$\sum_{\beta\neq n+p}[t_r(H_\alpha^2H_\beta^2)-t_r(H_\alpha H_\beta)^2]$$

$$\leqslant 2[(n-1)(1+H^2)-Q]t_rH_\alpha^2-\frac{2}{n}(t_rH_\alpha^2)^2,$$

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[t_rH_\alpha^2H_\beta^2-t_r(H_\alpha H_\beta)^2]$$

$$\leqslant 2[(n-1)(1+H^2)-Q]\tau-\frac{2}{n}\sum_{\alpha\neq n+p}(t_rH_\alpha^2)^2. \tag{4.4}$$

在(1.16)中令 $a=-1$，若 $n\geqslant 4$，由(2.1)、(2.2)、(2.3)、(4.3)、(4.4)及(1.17)

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant-\frac{8}{3}(1-\delta)(p-2)(n-1)^{\frac{1}{2}}\tau-$$

$$n\tau + 2n\delta\tau - 4[(n-1)(1+H^2) - Q]\tau -$$
$$(n-4)[(n-1)(1+H^2) - Q]\tau + nH^2\tau$$
$$= n\tau\{Q - [\frac{8}{3n}(1-\delta)(p-2)(n-1)^{\frac{1}{2}} +$$
$$(n-2\delta) + (n-2)H^2]\}.$$

根据定理1的一样论证，有

定理3　在定理1的同样条件下，如果 M^n 在任一点的 Ricci 曲率均大于

$$\frac{8}{3n}(1-\delta)(p-2)\sqrt{n-1}+(n-2\delta)+(n-2)H^2, \quad (n\geqslant 4)$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 中某 $n+1$ 维全测地子流形的全脐超曲面.

注　若 $\delta=1$，即当 N^{n+p} 为常曲率空间时，定理1、定理2、定理3都是熟知的结果.

本文是作者在杭州大学访学期间完成的，对沈一兵教授的悉心指导和热情鼓励，在此表示衷心感谢！

参 考 文 献

[1] Yau S T. *Submanifolds with constant mean curvature I* [J]. Amer. J. Math., 1974, 96.

[2] Chern S S, do carmo M, Kobayahsi S. *Minimal submanifold of a sphere with second fundamental form of constant length* [J]. Shiing-Chem Chern Selected papers, 1978, 393—409.

[3] Golderg S I. *Curvature and homology* [J]. Academic Press, London, 1962.

[4] Xu H W. *On closed minimal submanifolds in pinched riemannian manifolds* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1995, 347.

On the Pseudo-umbilical Submanifolds of a Locally Symmetric Space

SONG Wei-dong

(Dept. of Math., Anhui Normal Univ., Wuhu 241000)

Abstract: In this paper, We discussed the compact pseudo-umbilical submanifolds M^n with parallel mean curvature vector in a locally symmetric Riemannian manifold N^{n+p}, and get some pinching theorems that M^n be an totally umbilical submanifold and reduction of the codimension.

Key words: locally symmetric; pseudo-umbilical submanifolds; totally umbilical.