第19卷第3期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 3
1999年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1999

一类非紧算子正不动点的存在唯一性*

张庆政
(商丘师专数学系，河南 476000)

摘 要：本文利用锥理论和迭代技巧，研究了一类非紧混合单调算子正不动点的存在唯一性，改进和推广了混合单调算子、增算子与减算子的某些相应结果.

关键词：锥和半序，混合单调算子，正不动点.
分类号：AMS(1991) 47H10/CLC O177.2
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)03-0617-04

1 引 言

文献[1,2]研究了具有某种特性的混合单调算子正不动点的存在唯一性，本文讨论一类更广泛的混合单调算子，在没有连续性和紧性条件下，证明了这类算子存在唯一的正不动点，统一和发展了文献[1－4]中的相应结果.

设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的锥，“$\leqslant$”是由锥 P 导出的半序，关于锥和半序的理论见[5]；以下用到的混合单调算子及其耦合不动点或不动点概念见[1－2].

设 $A:P\times P\to P$ 是一个算子，$I=(0,1)$，若存在函数 $\varphi:I\times I\times I\times P\times P\to I$ 使得

$$A(tx,t^{-1}y)\geqslant\varphi(t,s,r,x,y)A(x,y),\ 0<s\leqslant t\leqslant r<1,x,y\in P, \tag{1}$$

则称 A 为二元 φ 凹算子；若存在上述函数 φ 使得

$$A(t^{-1}x,ty)\leqslant[\varphi(t,s,r,x,y)]^{-1}A(x,y),\ 0<s\leqslant t\leqslant r<1,x,y\in P, \tag{2}$$

则称 A 为二元 $-\varphi$ 凸算子.

注 1 由 $A(x,y)=A(t(t^{-1}x),t^{-1}(ty))=A(t^{-1}(tx),t(t^{-1}y))$ 及(1)，(2)两式可分别得出

$$A(x,y)\geqslant\varphi(t,s,r,t^{-1}x,ty)A(t^{-1}x,ty),\ 0<s\leqslant t\leqslant r<1,x,y\in P,$$

$$A(x,y)\leqslant[\varphi(t,s,r,tx,t^{-1}y)]^{-1}A(tx,t^{-1}y),\ 0<s\leqslant t\leqslant r<1,x,y\in P,$$

可以看出，在一般情况下(1)式与(2)式互不蕴含，即 φ 凹与 $-\varphi$ 凸是不同的算子.

注 2 当(1)式中 A 与 y 无关((2)式中 A 与 x 无关)并取 $s=r=t$ 时，A 即为文献[3]中的一元 φ 凹($-\varphi$ 凸)算子.

为行文方便，列出关于函数 φ 的如下假设：

---

* 收稿日期：1996-10-15
基金项目：河南省教委重点科研基金(98110020)和山东省自然科学基金(Y97A12017)资助项目.
作者简介：张庆政(1959-)，男，商丘师专数学系副教授.

(H_1)　对任意 $0<s\leqslant t\leqslant r<1$ 及 $x,y\in P$ 有 $\lim\limits_{h\to t^-}\varphi(h,s,r,x,y)>t$；

(H_2)　对任意 $0<s\leqslant t\leqslant r<1$ 及 $x,y\in P$ 有 $\varphi(t,s,r,x,y)>t$.

易知，当 φ 关于 t 左连续时，(H_1) 与 (H_2) 等价.

2　主要结果

定理1　设 E 是有正规锥 P 的实 Banach 空间，$A:P\times P\to P$ 是 φ 凹的混合单调算子，且满足：

(i)　存在 $u_0,v_0\in P$，$u_0<v_0$ 及 $\varepsilon>0$ 使得 $u_0<A(u_0,v_0)$，$A(v_0,u_0)\leqslant v_0$ 且 $A(u_0,v_0)\geqslant\varepsilon A(v_0,u_0)$；

(ii)　存在 $w_0,z_0\in[u_0,v_0]$，使对任意 $0<s\leqslant t\leqslant r<1$，$x,y\in[u_0,v_0]$ 都有

$$\varphi(t,s,r,x,y)\geqslant\varphi(t,s,r,w_0,z_0).$$

则有下述结论：

(a)　当 (H_1) 满足时，A 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一不动点 $x^*>\theta$，且对任何 $x_0,y_0\in[u_0,v_0]$ 作迭代序列

$$x_n=A(x_{n-1},y_{n-1}),\ y_n=A(y_{n-1},x_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,\tag{3}$$

都有 $x_n\to x^*$，$y_n\to x^*$ $(n\to\infty)$；

(b)　当 (H_1) 与 (H_2) 均满足时，x^* 是 A 在 P_{u_1} 中的唯一不动点，且对 A 的任何耦合不动点 $(\bar{x},\bar{y})\in P_{u_1}\times P_{u_1}$ 都有 $\bar{x}=\bar{y}=x^*$，其中 $u_1=A(u_0,v_0)$，

$$P_{u_1}=\{x\in E\mid\exists\ \lambda,\mu>0\ 使得\ \lambda u_1\leqslant x\leqslant\mu u_1\}.$$

证明　(a) 令 $u_n=A(u_{n-1},v_{n-1})$，$v_n=A(v_{n-1},u_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，由条件(i)及 A 混合单调，用归纳法易证：

$$\theta\leqslant u_0<u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0\tag{4}$$

因 $u_1\geqslant\varepsilon v_1$，故 $u_n\geqslant u_1\geqslant\varepsilon v_1\geqslant\varepsilon v_n$. 令 $t_n=\sup\{t:u_n\geqslant tv_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $u_n\geqslant t_nv_n$；又 $u_{n+1}\geqslant u_n\geqslant t_nv_n\geqslant t_nv_{n+1}$，故由(4)式及 t_n 的定义得 $0<\varepsilon\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant\cdots\leqslant 1$，于是 $t_0=\lim\limits_{n\to\infty}t_n$ 存在且 $0<t_0\leqslant 1$. 下证 $t_0=1$. 如果 $t_0<1$，则 $0<\varepsilon\leqslant t_n\leqslant t_0<1$，由 $u_n\geqslant t_nv_n$，A 混合单调及(1)式得

$$u_{n+1}\geqslant A(t_nv_n,t_n^{-1}u_n)\geqslant\varphi(t_n,\varepsilon,t_0,v_n,u_n)v_{n+1},$$

此式蕴含 $t_{n+1}\geqslant\varphi(t_n,\varepsilon,t_0,v_n,u_n)$，由条件(ii)知 $t_{n+1}\geqslant\varphi(t_n,\varepsilon,t_0,w_0,z_0)$，再由 (H_1) 可得

$$t_0\geqslant\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n,\varepsilon,t_0,w_0,z_0)=\lim_{t\to t_0^-}\varphi(t,\varepsilon,t_0,w_0,z_0)>t_0,$$

矛盾，因此 $t_0=1$. 由 $u_n\geqslant t_nv_n$ 及(4)式得

$$\theta\leqslant u_{n+p}-u_n\leqslant v_n-u_n\leqslant(1-t_n)v_n\leqslant(1-t_n)v_0,$$

由上式及 P 的正规性，利用常规证法可证：$\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 收敛于同一极限 $x^*\in[u_n,v_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，且 x^* 是 A 在 $[u_0,v_0]$ 中的唯一正不动点，同时迭代序列(3)满足 $x_n\to x^*$，$y_n\to x^*$ $(n\to\infty)$.

(b)　由 $u_1\leqslant x^*\leqslant v_1$ 及 $u_1\geqslant\varepsilon v_1$ 可知 $x^*\in P_{u_1}$，即 x^* 是 A 在 P_{u_1} 中的不动点. 设 $(\bar{x},\bar{y})\in P_{u_1}\times P_{u_1}$ 是 A 的任意耦合不动点，由 P_{u_1} 的定义知 $\bar{x},\bar{y}>\theta$，且可取 $\lambda>0$ 使得 $\lambda\bar{x}\leqslant x^*\leqslant\lambda^{-1}\bar{x}$，$\lambda\bar{y}\leqslant x^*\leqslant\lambda^{-1}\bar{y}$. 令 $\lambda_0=\sup\{t>0:t\bar{x}\leqslant x^*\leqslant t^{-1}\bar{x},t\bar{y}\leqslant x^*\leqslant t^{-1}\bar{y}\}$，则 $0<\lambda\leqslant\lambda_0<+\infty$ 且 $\lambda_0\bar{x}\leqslant x^*\leqslant$

$\lambda_0^{-1}\overline{x},\lambda_0\overline{y}\leqslant x^*\leqslant\lambda_0^{-1}\overline{y}$. 下证 $\lambda_0\geqslant 1$，假若 $\lambda_0<1$，则由 $0<\lambda\leqslant\lambda_0<1$，$A$ 混合单调及(1)式得

$$A(x^*,x^*)\geqslant A(\lambda_0\overline{x},\lambda_0^{-1}\overline{y})\geqslant\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{x},\overline{y})A(\overline{x},\overline{y}),$$

即 $x^*\geqslant\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{x},\overline{y})\overline{x}$，同理可得

$$x^*\geqslant\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{y},\overline{x})\overline{y},\overline{x}\geqslant\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,x^*,x^*)x^*,\overline{y}\geqslant\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,x^*,x^*)x^*.$$

令 $\lambda^*=\min\{\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{x},\overline{y}),\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{y},\overline{x}),\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,x^*,x^*)\}$，则有 $\lambda^*>0$ 且 $x^*\geqslant\lambda^*\overline{x},x^*\geqslant\lambda^*\overline{y},\overline{x}\geqslant\lambda^*x^*,\overline{y}\geqslant\lambda^*x^*$，于是由 λ_0 的定义知 $\lambda_0\geqslant\lambda^*$. 另一方面，由 $0<\lambda\leqslant\lambda_0<1$ 及(H_2)知，$\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{x},\overline{y})>\lambda_0,\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,\overline{y},\overline{x})>\lambda_0,\varphi(\lambda_0,\lambda,\lambda_0,x^*,x^*)>\lambda_0$，故 $\lambda^*>\lambda_0$，矛盾，于是 $\lambda_0\geqslant 1$，从而 $\overline{x}=\overline{y}=x^*$ 且 x^* 为 A 在 P_{u_1} 中的唯一不动点. □

注 3 当函数 φ 关于 x 和 y 都递增或都递减或一个递增一个递减时，定理 1 的条件(ii)满足.

注 4 由定理 1 的证明可知，只要(1)式对满足 $u_0\leqslant y\leqslant x\leqslant v_0$ 的 x,y 成立，就有其结论(a)成立，因此文献[1]中定理 1 是本文定理 1 结论(a)取 $u_0=\theta$ 且 $\varphi(t,s,r,x,y)=t[1+\eta(s,r)]$ 时的特例.

注 5 假设(H_2)仅用于证明 A 在 P_{u_1} 中有唯一不动点，由此并结合注 2 便知，本文定理 1 是文献[3]定理 1 的改进和推广；对于不动点的存在性，[3]中条件"$\forall\ t\in I$ 有 $\varphi(t,x)>t$"可以删掉，而且证法与[3]不同.

推论 1 设 E 是有正规锥 P 的实 Banach 空间，$A:P\times P\to P$ 为 φ 凹的混合单调算子，$\varphi(t,s,r,x,y)$ 关于 x 递增，关于 y 递减，且存在 $z_0>\theta$ 与 $\varepsilon>0$ 使得

$$\varepsilon z_0\leqslant A(z_0,z_0)\leqslant\varepsilon^{-1}z_0,\lim_{t\to 0^+}t[\varphi(t,t,t,z_0,z_0)]^{-1}=0,$$

则有定理 1 的两个结论成立，其中的 u_0,v_0 与 P_{u_1} 分别换为 $t_0z_0,t_0^{-1}z_0$ 与 P_{z_0}，此处 $t_0\in(0,1)$ 为定常数.

证明 由 $\lim\limits_{t\to 0^+}t[\varphi(t,t,t,z_0,z_0)]^{-1}=0$ 知，存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $t_0[\varphi(t_0,t_0,t_0,z_0,z_0)]^{-1}<\varepsilon$，由 $z_0>\theta$ 知

$$[\varphi(t_0,t_0,t_0,z_0,z_0)]^{-1}t_0z_0\leqslant\varepsilon z_0\leqslant A(z_0,z_0)\leqslant\varepsilon^{-1}z_0\leqslant\varphi(t_0,t_0,t_0,z_0,z_0)t_0^{-1}z_0,$$

令 $u_0=t_0z_0,v_0=t_0^{-1}z_0$，则 $\theta<u_0<v_0$. 由(1)式得

$$A(u_0,v_0)\geqslant\varphi(t_0,t_0,t_0,z_0,z_0)A(z_0,z_0)\geqslant t_0z_0=u_0,$$

$$A(z_0,z_0)\geqslant\varphi(t_0,t_0,t_0,t_0^{-1}z_0,t_0z_0)A(t_0^{-1}z_0,t_0z_0)\geqslant\varphi(t_0,t_0,t_0,z_0,z_0)A(v_0,u_0),$$

后一不等式蕴含 $A(v_0,u_0)\leqslant t_0^{-1}z_0=v_0$，从而有 $A(u_0,v_0)\geqslant u_0=t_0^2v_0\geqslant t_0^2A(v_0,u_0)$. 又 $t_0z_0\leqslant u_1=A(u_0,v_0)\leqslant A(v_0,u_0)\leqslant t_0^{-1}z_0$，故 $u_1\in P_{z_0}$，从而 $P_{u_1}=P_{z_0}$，再由定理 1 及注 3 即得结论. □

注 6 在推论 1 中取 $A(x,y)=Ax$ 即得文献[3]中推论 1.

推论 2 设 E 是有正规体锥 P 的实 Banach 空间，$A:\overset{0}{P}\times\overset{0}{P}\to\overset{0}{P}$ 为 φ 凹的混合单调算子，$\varphi(t,s,r,x,y)$ 关于 x 递增，关于 y 递减，若(H_1)与(H_2)均成立且对任意 $x\in\overset{0}{P}$ 有

$$\lim_{t\to 0^+}t[\varphi(t,t,t,x,x)]^{-1}=0,\tag{5}$$

则 A 在 $\overset{0}{P}$ 中有唯一不动点 x^*，对任何 $x_0,y_0\in\overset{0}{P}$ 作迭代序列(3)都有 $x_n\to x^*,y_n\to x^*$，且对 A 的任何耦合不动点 $(\overline{x},\overline{y})\in\overset{0}{P}\times\overset{0}{P}$ 都有 $\overline{x}=\overline{y}=x^*$.

证明 取 $z_0\in\overset{0}{P}$，则 $z_0>\theta$ 且 $A(z_0,z_0)\in\overset{0}{P}$，从而存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\varepsilon z_0\leqslant A(z_0,z_0)\leqslant\varepsilon^{-1}z_0$，由(5)式及推论 1 知，$A$ 在 P_{z_0} 中有唯一不动点 x^*，且对 A 的任何耦合不动点 $(\bar{x},\bar{y})\in P_{z_0}\times P_{z_0}$ 都有 $\bar{x}=\bar{y}=x^*$，由 $z_0\in\overset{0}{P}$ 易知 $P_{z_0}=\overset{0}{P}$.

任取 $x_0,y_0\in\overset{0}{P}$，对上述 $z_0\in\overset{0}{P}$ 及 $\varepsilon>0$，由(5)式可取 $t_0>0$ 充分小使不等式

$$t_0[\varphi(t_0,t_0,t_0,z_0,z_0)]^{-1}<\varepsilon,t_0z_0\leqslant x_0,y_0\leqslant t_0^{-1}z_0$$

同时成立，由推论 1 及定理 1 结论(a)的证明知，迭代序列(3)中的 x_n 与 y_n 都收敛于 A 在 $[t_0z_0,t_0^{-1}z]\subset\overset{0}{P}$ 中的不动点，于是有 $x_n\to x^*,y_n\to x^*$. □

注 7 文献[2]中定理 1 是上述推论 2 取 $\varphi(t,s,r,x,y)=t^a$ 时的特例，文献[4]中定理 1 也是推论 2 的特例.

注 8 对于满足(2)式的二元 $-\varphi$ 凸算子，有与上述结果对应的结论(在推论 1—2 中相应要求 φ 关于 x 递减关于 y 递增)，这些对应的结论包括文献[3]中定理 2、推论 3 和文献[4]中定理 1(减算子情况)作为特例.

注 9 本文结论对算子没有任何连续性和紧性方面的假设.

对郭大钧教授和孙经先教授的悉心指导表示衷心地感谢.

参 考 文 献

[1] Guo Dajun. *Existence and uniqueness of positive fixed points for mixed monotone operators and applications* [J]. Appl. Anal., 1992, **46**: 91—100.

[2] Guo Dajun. *Fixed points of mixed monotone operators with applications* [J]. Appl. Anal., 1988, **31**: 215—224.

[3] 李福义，梁展东. φ凹(凸)算子的不动点定理及其应用 [J]. 系统科学与数学，1994, **14**(4): 355—360.

[4] 郭大钧. 一类凹与凸算子的不动点与固有元 [J]. 科学通报，1985, **30**: 1132—1135.

[5] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南:山东科学技术出版社，1985.

Existence and Uniqueness of Positive Fixed Point for a Class Noncompact Operator

ZHANG Qing-zheng

(Dept. of Math., Shangqiu Teachers' College, Henan 476000)

Abstract: By using the cone theory and the iterative technique, the existence and uniqueness of positive fixed point for a class noncompact mixed monotone operator are studied. Some relevant results of mixed monotone operator, increasing operator and decreasing operator are improved and generalized.

Key words: cone and partial ordering; mixed monotone operator; positive fixed points.