第19卷第3期　　　数学研究与评论　　　Vol. 19 No. 3
1999年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1999

简论局部指标定理的证明*

虞言林
(中国科学院数学研究所，北京 100080)

摘　要：本文描述一个形式算法(即 Diana 算法)来证明 Dirac 算子的局部指标定理，并指出算法的魔力需附上一个逻辑的证明. 在这种理解下，可看出 Getzler 的证明有一些缺陷.

关键词：Atiyah-Singer 指标定理；热方程.
分类号：AMS(1991) 58G10, 58G11/CLC O189.33
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0621-06

1967 年 McKean-Singer 提出了用热方程方法来证明 Atiyah-Singer 定理的研究，并以猜想的方式给出了局部指标定理. 迄今为止，人们已经证出四类具体的椭圆算子的局部指标定理. 其中用到的热方程方法与物理学中的 Feymann 积分方法在语言陈述上有共同之处，它们还具有一些共享的观念. 由于局部指标定理是一个纯数学的定理，因此有必要分析定理证明中的逻辑性问题.

Dirac 算子的局部指标定理在八十年代初为 Witten 首次证明. 那是一个物理式的证明. 后来许多作者纷纷给出了他们自己的证明. 最后的两个证明是 Getzler 和 Yu 的(见[1],[2]). 从论文出现的时间可判断：这两个证明是彼此独立完成的. 其后 B-V-G 三人写了一本书[3]，其中补充了 Getzler 证明的细节和修改. 本文将对 Getzler 的证明做一些逻辑上的分析.

1　Diana 算法

这一节介绍在 Dirac 算子的局部指标定理的各种证明中，皆包含着的一个进展，那就是：用即将介绍的 Diana 算法来证明定理. 大家将看到 Diana 算法中存在着两个缺陷. 我们可以根据在克服这两个缺陷上的情况来衡量一个证明的逻辑性.

Getzler 引入一个“rescaling”的论证. 这个论证可以克服 Diana 算法的第一缺陷，但是在克服第二个缺陷上它无能为力. 此外在克服第二个缺陷上 Getzler 的论证是闭目跳沟.

在介绍 Diana 算法之前，先回忆一下人们需要计算的对象. 设 M 是 $2n$ 维紧致无边的 spin$(2n)$流形，即在 M 上有一个 spin$(2n)$主丛 P 使得 M 的切丛是 P 的一个自然的配丛. 又设 S 是 spin$(2n)$的旋量空间，于是有向量丛

* 收稿日期：1998-10-04
作者简介：虞言林(1939-)，男，浙江人，研究生毕业，研究员.

$$E=P\times_{\mathrm{spin}(2n)}S$$

和一个为 Atiyah-Singer 定义的 Dirac 算子

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

其中 $\Gamma(E)$是 E 的 C^∞截面集合. 令

$$\square=D^2:\Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

它是一个二阶椭圆算子,从而有热算子$\frac{\partial}{\partial t}+\square$的解算子 $e^{-t\square}$. 这个解算子是积分算子,它的积分核记做 $G(t,y,x)$,定义

$$\mu(x)=\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G(t,x,x),$$

并称之为热核密度,其中 str 是超迹,它来源于 S 中的超结构. 上述 $\mu(x)$是一个 M 上的函数,很难算. 对此 McKean-Singer 猜测了一个下述的局部指标定理.

局部指标定理 $\mu(x)=\frac{\hat{A}}{*1}|_x$,其中 $\hat{A}$ 是根据 Chern-Weil 理论做出的一个 M 上的 $2n$ 次微分式,通常称为 $\hat{A}$ 示性式. $*1$ 是 M 的定向体积元.

证明局部指标定理的核心在于计算 $\mu(x)$. 下面介绍一个办法来算 $\mu(x)$. 这个办法不是严格按照 $\mu(x)$的定义,而是利用一些奇妙的构思删除或转化一些计算过程中的量,算出的结果可能不再代表 $\mu(x)$,但是一旦它恰恰是$\frac{\hat{A}}{*1}|_x$ 时,便可以说这个奇妙的算法给出局部指标定理的一个"证明". 这种类型的奇妙算法在理论物理学中是很多的. 为谈论方便,不妨给这里算 $\mu(x)$的奇妙方法起一个名字,当时国内正播放着一个美国的电视剧,剧中的女超人名叫 Diana,因此 Diana 也就未必不可地成了这个算法的名字了.

考虑 M 中 x 的一个小邻域 N_x,其上取以 x 为心的法坐标系$(y_1,\cdots,y_{2n})$. 在这个坐标中$\square$有如下的表达式

$$\square=-\sum_{i,j}a_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_i b_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}+C(y).$$

利用$\square$的定义和 Weizenbock 公式,有

$$a_{ij}(y)=\delta_{ij}+\cdots,$$

$$b_i(y)=\frac{1}{4}\sum_{j,k,l}R_{jikl}(x)y_je_ke_l+\cdots,$$

$$c(y)=\frac{1}{64}\sum y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(x)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(x)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}+\cdots.$$

从而

$$\square=-\sum\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(x)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta+\frac{1}{64}\sum y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(x)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(x)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}+\cdots.$$

令

$$\square_x^{(1)}=-\sum\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(x)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta+\frac{1}{64}\sum y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(x)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(x)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4},$$

$$\square_x^{(0)}=-\sum\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{64}\sum y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(x)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(x)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}.$$

Diana 算法宣称:以$\square_x^{(1)}$ 或$\square_x^{(0)}$ 代替$\square$,则算出的 $\mu(x)$是相同的.

接下来Diana算法便来求解$\frac{\partial}{\partial t}-\square_x^{(1)}$或$\frac{\partial}{\partial t}-\square_x^{(0)}$的基本解$G_x^{(1)}(t,y,z)$或$G_x^{(0)}(t,y,z)$. 在这里自然地把$\square_x^{(1)}$,$\square_x^{(0)}$看成$\mathbf{R}^{2n}$中的二阶椭圆算子. 值得注意的是写不出$G_x^{(1)}(t,y,z)$, $G_x^{(0)}(t,y,z)$的表达式！那么Diana算法是如何算出它们来的呢？首先引入一组乘法可换的自变元$u_1,\cdots,u_n$和一个等式

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1,2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_{2n,1} & \cdots & \Omega_{2n,2n} \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & u_1 & & & \\ -u_1 & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & u_n \\ & & & -u_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

并且承认从上述等式出发"形式导出"的一切公式. 其中(Ω_{ij})是曲率微分式矩阵，它的定义如下：设$\{E_1,\cdots,E_{2n}\}$是x点附近的幺正标架场，它在过x点的测地线上是平行的，使得

$$E_i(x)=\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_x.$$

由等式

$$\begin{cases} R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}, \\ R(X,Y)E_i=\sum_j \Omega_{ji}(X,Y)E_j \end{cases}$$

决定二次微分式Ω_{ji}，其中X,Y是向量场，∇是Levi-Civita联络.

先来看一看由Chern-Weil理论定义的Pontryagin示性式p_i是如何借助公式$(*)$而可用u_i表出的. 从

$$\lambda^{2n}+p_1\lambda^{2n-2}+p_2\lambda^{2n-4}+=\det\left(\lambda I+\frac{\Omega}{2\pi}\right)=\det\left(\lambda I+\begin{pmatrix} 0 & u_1 & & & \\ -u_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & u_0 \\ & & & -u_n & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\lambda^2+u_i^2)$$

可知

$$p_1=u_1^2+\cdots+u_n^2,\quad p_2=\sum_{i<j}u_i^2u_j^2,\cdots.$$

注意到拓扑学中Pontryagin示性类用陈根的表达式和上式相似，所以上面的$u_1,\cdots,u_n$也称为陈根. 从而M上一切可以用Pontryagin示性式表出的示性式(例如$\hat{A}$示性式)也就可以用陈根$u_1,\cdots,u_n$表出了.

现在借助陈根利用公式$(*)$来计算$G_x^{(0)}(t,y,z)$和$\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{str} G_x^{(0)}(t,x,x)$. 当然也可计算$G_x^{(1)}(t,y,z)$和$\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{str} G_x^{(1)}(t,x,x)$，不过不另说了.

由于

$$R_{klij}(x)=R_{ijkl}(x)=\Omega_{kl}(E_i(x),E_j(x))$$

和等式$(*)$的一个形式推论

$$\Omega_{kl}=\sum_{s=1}^{n}2\pi u_s\cdot(\delta_{k,2s-1}\delta_{l,2s}-\delta_{k,2s}\delta_{l,2s-1}),$$

可知

$$\sum_{\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(x)e_\alpha e_\beta=\sum_{\alpha,\beta}\Omega_{ij}(E_\alpha(x),\mu_\beta(x))e_\alpha e_\beta$$
$$=2\pi\sum_{s=1}^{n}u_s(E_\alpha(x),E_\beta(x))e_\alpha e_\beta(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1}).$$

若令

$$W_s=\pi\cdot\sum_{\alpha,\beta}u_s(E_\alpha(x),E_\beta(x))e_\alpha e_\beta,$$

那么

$$\square_x^{(0)}=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{16}\sum_{i,j,s,\bar{s}}y_iy_j(\delta_{i,2s-1}\delta_{k,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{k,2s-1})(\delta_{k,2\bar{s}-1}\delta_{j,2\bar{s}}-\delta_{k,2\bar{s}}\delta_{j,2\bar{s}-1})W_sW_{\bar{s}}$$
$$=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{16}\sum_s(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)W_s^2.$$

在上面的计算中，Diana 算法把陈根 u_s 想成二次微分式，从而有 $u_s(E_\alpha(x),E_\beta(x))$. 至于 W_s 与 $W_{\bar{s}}$ 是否乘法可换呢？Diana 算法认为它们是可换的. 这样便容易地对热算子

$$\frac{\partial}{\partial t}-(\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{16}\sum_s(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)W_s^2)$$

写出它的基本解

$$G_x^{(0)}(t,y,z)=\prod_{s=1}^{n}(\frac{1}{4\pi t}\frac{\theta_s}{\operatorname{sh}\theta_s}\cdot\exp\{-\frac{1}{4t}\frac{\theta_s}{\operatorname{sh}\theta_s}[\operatorname{ch}\theta_s\cdot(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2+z_{2s-1}^2+z_{2s}^3)-$$
$$2y_{2s-1}z_{2s-1}-2y_{2s}z_{2s}]\}),$$

其中 $\theta_s=\frac{\sqrt{-1}t}{2}W_s$. 于是

$$G_x^{(0)}(t,x,x)=G_x^{(0)}(t,0,0)=\prod_{s=1}^{n}(\frac{1}{4\pi t}\frac{\theta_s}{\operatorname{sh}\theta_s}).$$

众所周知

$$\operatorname{str}(e_{i_1}\cdots e_{i_m})=\begin{cases}0, & 当\ m<2n,\\ (\frac{2}{\sqrt{-1}})^n\in(i_1,\cdots,i_{2n}), & 当\ m=2n,\end{cases}$$

其中 $\in(i_1,\cdots,i_{2n})$ 是排列的符号. 于是当 $k\neq n$ 时，

$$\lim_{t\to0}\operatorname{str}(\frac{1}{t^n}\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_k})=\lim_{t\to0}\operatorname{str}((\frac{\sqrt{-1}}{2})^kt^{k-n}W_{s_1}\cdots W_{s_k})=0.$$

若令

$$\hat{W}_s=\pi\cdot\sum_{\alpha,\beta}u_s(E_\alpha(x),E_\beta(x))\omega_\alpha\wedge\omega_\beta,$$

其中 $\{\omega_1,\cdots,\omega_{2n}\}$ 是 $\{E_1,\cdots,E_{2n}\}$ 的对偶基，这样便有

$$\lim_{t\to0}\operatorname{str}(\frac{1}{t^n}\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n})=\operatorname{str}((\frac{\sqrt{-1}}{2})^nW_{s_1}\cdots W_{s_n})=(\hat{W}_{s_1}\wedge\cdots\wedge\hat{W}_{s_n})(E_1(x),\cdots,E_{2n}(x)).$$

对于 n 个变元的幂级数 f，同样有

$$\lim_{t\to 0}\operatorname{str}(\frac{1}{t^n}f(\theta_1\cdots\theta_n))=(f(\hat{W}_1,\cdots,\hat{W}_n))(E_1(x),\cdots,E_{2n}(x)).$$

注意到 u_s 被想成是二次微分式，故

$$\hat{W}_s=\pi\cdot\sum_{\alpha,\beta}u_s(E_\alpha(x),E_\beta(x))\omega_\alpha\wedge\omega_\beta=2\pi u_s.$$

从而当令

$$f(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\prod_{s=1}^{n}(\frac{\theta_s}{\operatorname{sh}\theta_s})$$

后，有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G_x^{(0)}(t,x,x)&=\frac{1}{(4\pi)^n}\lim_{t\to 0}\operatorname{str}(\frac{1}{t^n}f(\theta_1,\cdots,\theta_n))\\&=\frac{1}{(4\pi)^n}f(2\pi u_1,\cdots,2\pi u_n)(E_1(x),\cdots,E_{2n}(x))\\&=\frac{1}{(4\pi)^n}(4\pi)^n f(\frac{u_1}{2},\cdots,\frac{u_2}{2})(E_1(x),\cdots,E_{2n}(x))\\&=(\prod_{s=1}^{n}\frac{\frac{u_s}{2}}{\operatorname{sh}\frac{u_s}{2}})(E_1(x),\cdots,E_{2n}(x)).\end{aligned}$$

按照陈根表示示性式的规定，上述最后一式恰是 $\frac{\hat{A}}{*1}|_x$. 这样一来，就用 Diana 算法证明了 Dirac 算子的局部指标定理了.

很明显，上述的 Diana 算法有两个缺陷，即有两个在逻辑上没有说明白的地方. 其一是为什么能以 $\Box_x^{(1)}$ 或 $\Box_x^{(0)}$ 代替 $\Box$ 使得它们的 $\mu(x)$ 相同？另一问题是当借助陈根进行各种运算时为什么运算本身是含糊的而算出的结果却是对的？

2 Getzler 的证明

几乎所有的局部指标定理的证明皆包含着证明下列三个等式

(1) $\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G(t,x,x)=\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G_x^{(1)}(t,x,x)$,

(2) $\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G_x^{(1)}(t,x,x)=\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G_x^{(0)}(t,x,x)$,

(3) $\lim_{t\to 0}\operatorname{str}G_x^{(0)}(t,x,x)=\frac{\hat{A}}{*1}|_x$,

或它们的某种变形. Getzler 的证明中明显地出现了上述三个等式，Diana 算法认为第一等式是不用证的，第三等式可借助陈根来证，至于第二等式或者断言不用证，或者也可借助陈根来证.

Getzler 引入一个 rescaling 的论证来证等式(1). 这个论证是成功的. 不过这并不表示 Getzler 原证明可以顺畅通过，因为证明的细节要依赖于 $\mathbf{R}^{2n}$ 中变系数二阶热算子的基本解之渐近展开定理，这个定理迄今尚未公布过. 熟悉了渐近展开定理之后再看[1]中第 113 页倒数第六行的不等式，会有不踏实的感觉. Getzler 对等式(2)与(3)的证明是写出 $G_x^{(1)}(t,y,z)$ 或 $G_x^{(0)}(t,y,x)$ 的表达式而后自然可得. 不幸他(或他们)写出的表达式是错误的，$G_x^{(0)}(t,y,x)$ 根本就没有清楚的表达式，$G_x^{(1)}(t,y,x)$ 则更是如此了.

下面说一下 rescaling 论证法不可能用来证明等式(2),因为在等式

$$\square_x^{(1)} = \square_x^{(0)} + \frac{1}{4}\sum_{ij\alpha\beta}(x)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta$$

中 rescaling 的鉴别法不能区分$\square_x^{(0)}$ 和 $\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(x)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta$ 的优劣,从而不能断言可以从$\square_x^{(1)}$ 中杀去非$\square_x^{(0)}$ 的项,以使(2)成立.

参 考 文 献

[1] Getzler E. *A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem* [J]. Topology, 1986, **25**: 111—117.

[2] Yu Y L. *Local index theorem for Dirac operator* [J]. Acta Math. Sinica, New Series, 1987, **3**(2): 152—169.

[3] Berline N, Getzler E and Vergne M. *Heat Kernels and Dirac Operator* [M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

A Brief Remark on a Proof of the Local Index Theorem

YU Yan-lin

(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract: The paper describes a formal algorithm (i. e. , Diana algorithm) to prove the local index theorem for Dirac operator, and points out that the magic power of the algorithm needs a logical ground attached. On this understanding we could see that there are several gaps in the Getzler's proof.

Key words: Atiyah-Singer index theorem; heat equation.