第19卷第3期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 3
1999年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1999

关于可数模空间$\varepsilon(\Omega)$的定义*

孙星明[1]， 杨力华[2]

1. 湘潭师范学院物理系，湖南 411201；
2. 中山大学数计学院，广州 510275

摘　要：本文给出并证明了[1]中可数模空间$\varepsilon(\Omega)$的定义对紧子集列$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$的依赖条件，提出了与紧子集列$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$的选择无关的$\varepsilon(\Omega)$的修正定义.

关键词：可数模空间，$\varepsilon(\Omega)$.
分类号：AMS(1991) 46B10/CLC O177.41
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0627-04

1 引　言

可数模空间是广义函数论研究的重要对象，其定义是：

定义 1　设$\mathscr{X}$是一个线性空间，称它是可数模空间(B_0^*空间)，是指在它上面有可数个半模$\{\|\cdot\|_m\}_1^{\infty}$，满足：

(1)　$\|x+y\|_m\leqslant\|x\|_m+\|y\|_m$；

(2)　$\|\lambda x\|_m=|\lambda|\,\|x\|_m$；

(3)　$\|x\|_m\geqslant 0,\ \|\theta\|_m=0$；

(4)　$\|x\|_m=0\,(m=1,2,\cdots)\Leftrightarrow x=0$.

可数模空间显然是一个半范空间，在其上的收敛性可定义为：$x_k\to x\ (k\to\infty)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\|x_k-x\|_m\to 0\ (k\to\infty,\forall\, m=1,2,\cdots)$，如果$\mathscr{X}$上两组可数个半模导致的收敛性(即拓扑)一致，则称它们是等价的.

在[1]中给出了如下的定理：

定理 1　在线性空间$\mathscr{X}$上，为了两组可数个半模：$\{\|\cdot\|_m\}_1^{\infty}$与$\{\|\cdot\|'_m\}_1^{\infty}$所导致的拓扑等价，必须且仅须如下两条成立：

(1)　$\forall\, m\in\mathrm{N}$(自然数集)，$\exists\, m'\in\mathrm{N}$和$C_{m,m'}>0$，使得$\|x\|_m\leqslant C_{m,m'}\|x\|'_{m'}\ (\forall\, x\in\mathscr{X})$；

(2)　$\forall\, n'\in\mathrm{N},\exists\, n\in\mathrm{N}$和$C'_{n',n}>0$，使得$\|x\|'_{n'}\leqslant C'_{n',n}\|x\|_n\ (\forall\, x\in\mathscr{X})$.

在[1]中还研究了空间$\varepsilon(\Omega)$，其定义是：

定义 2　设Ω是R^n中任一开集，$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$是一串相对于Ω的紧集，适合：

* 收稿日期：1996-11-11
作者简介：孙星明，博士，副教授.

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots \subset \Omega, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega. \tag{1.1}$$

令

$$\| \varphi \|_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \max_{x \in K_m} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (\forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega), m = 1,2,\cdots), \tag{1.2}$$

其中 ∂^α 为多重非负指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 级微分算子，$|\alpha|:=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$，$C^\infty(\Omega)$ 为 Ω 上无穷次可微函数空间. $\varepsilon(\Omega)$ 定义为配备可数模 $\| \varphi \|_m$ 的空间 $C^\infty(\Omega)$.

显然 $\varepsilon(\Omega)$ 是一个 B_0^* 空间，由于其定义建立在紧集列 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 上，自然要问 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义是否与 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 的选择有关，即所定义的拓扑是否与 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 选择有关. [1]中指出该定义与 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 的选择无关.

本文的工作为：

(1)　说明定理 1 的条件是不充分的，并给出了使之成立的适当条件；

(2)　说明 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义与 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 的选择是有关的，给出了使 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义与 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 的选择无关的充要条件，从而给出 $\varepsilon(\Omega)$ 的正确定义.

2　定理 1 成立的条件

下面的反例说明定理 1 的条件是不充分的：

例　于 $C_0^\infty(R^1)$（R^1 上具紧支集的无穷次可微函数空间）上引入如下两组半模：

$$\begin{cases} \| \varphi \|_m := \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \sup_{x \in R^1} |\varphi^{(k)}(x)| & (m = 0,1,\cdots), \\ \| \varphi \|'_m := \displaystyle\sup_{x \in R^1} |\varphi^{(m)}(x)| & (m = 0,1,\cdots). \end{cases}$$

容易验证 $\{\| \cdot \|_m\}_0^\infty$ 与 $\{\| \cdot \|'_m\}_0^\infty$ 都是 $C_0^\infty(R^1)$ 上半模，并且是等价的. 证明不存在 $m' \in \mathbf{N}$ 与 $C>0$ 使得 $\| \varphi \|_1 \leqslant C \| \varphi \|'_{m'}$ 对 $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^1)$ 成立.

事实上，若存在 $m' \in \mathbf{N}$ 与 $C>0$ 使得 $\| \varphi \|_1 \leqslant C \| \varphi \|'_{m'}$ 对 $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^1)$ 成立.

(i)　如果 $m'=0$，则 $\sup\limits_{x \in R^1} |\varphi'(x)| \leqslant C \sup\limits_{x \in R^1} |\varphi(x)| \quad (\forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^1))$. 记

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x|<1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

则 $\varphi \in C_0^\infty(R^1)$. 今作 $\varphi_k(x) := \varphi(kx)$ $(\forall\, k \in \mathbf{N})$，则 $\varphi_k \in C_0^\infty(R^1)$，且

$$\sup_{x \in R^1} |\varphi_k'(x)| \geqslant k \left|\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)\right| > 0, \quad \sup_{x \in R^1} |\varphi_k(x)| \leqslant 1,$$

于是 $k \left|\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant C$ $(\forall\, k \in \mathbf{N})$. 这是一个矛盾.

(ii)　如果 $m' \geqslant 1$，则

$$\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \leqslant C \sup_{x \in R^1} |\varphi^{(m')}(x)| \quad (\forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^1))$$

作 $\varphi_k(x) := \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ $(\forall\, k \in \mathbf{N})$，则 $\varphi_k \in C_0^\infty(R^1)$，且

$$\sup_{x\in R^1}|\varphi_k^{(m')}(x)|=\frac{1}{k^{m'}}\sup_{x\in R^1}|\varphi^{(m')}(x)|,\ \sup_{x\in R^1}|\varphi_k(x)|\geqslant e^{-1},$$

于是 $e^{-1}\leqslant\frac{C}{k}\sup_{x\in R^1}|\varphi^{(m')}(x)|\ (\forall\ k\in N)$.

令 $k\to 0$ 即得矛盾. 所以 $\{\|\cdot\|_m\}_0^\infty$ 与 $\{\|\cdot\|'_m\}_0^\infty$ 是不等价的. □

由于对 B_0^* 空间,在拓扑等价的意义下可数个半模 $\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty$ 可以换成满足如下递增条件的可数个半模 $\{\|\cdot\|'_m\}_1^\infty$: $\|x\|'_1\leqslant\|x\|'_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|'_m\leqslant\cdots(\forall\ x\in\mathscr{X})$. 事实上,令 $\|x\|'_m=\max(\|x\|_1,\cdots,\|x\|_m)\ (\forall\ x\in\mathscr{X})$ 即可. 下面证明当加上这样的递增条件时,定理 1 是成立的.

定理 2 设在线性空间 $\mathscr{X}$ 上,两组可数个半模 $\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty$ 与 $\{\|\cdot\|'_m\}_1^\infty$ 满足:

$$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_m\leqslant\cdots\quad(\forall\ x\in\mathscr{X}),$$
$$\|x\|'_1\leqslant\|x\|'_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|'_m\leqslant\cdots\quad(\forall\ x\in\mathscr{X}),$$

那么它们等价,必须且仅须如下两条成立:

(1) $\forall\ m\in\mathbf{N},\exists\ m'\in\mathbf{N}$ 和 $C_{m,m'}>0$,使得 $\|x\|_m\leqslant C_{m,m'}\|x\|'_{m'}(\forall\ x\in\mathscr{X})$;

(2) $\forall\ n'\in\mathbf{N},\exists\ n\in\mathbf{N}$ 和 $C'_{n',n}>0$,使得 $\|x\|'_{n'}\leqslant C'_{n',n}\|x\|_n(\forall\ x\in\mathscr{X})$.

证明 充分性是显然的,今证必要性. 易见只须证(1). 若(1)不成立,则$\exists\ m_0\in\mathbf{N}$ 与 $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ 使得 $\|x_m\|_{m_0}=1$ 且 $\|x_m\|'_m\leqslant\frac{1}{m}\ (m=1,2,\cdots)$,于是$\forall\ m\in\mathbf{N}$,当 $k\geqslant m$ 时,有 $\|x_k\|'_m\leqslant\|x_k\|'_k\leqslant\frac{1}{k}\to 0\ (k\to 0)$,因此 $\|x_k\|_m\to 0(k\to 0,\forall\ m\in\mathbf{N})$,这与 $\|x_m\|_{m_0}=1$ 矛盾. □

3 $\varepsilon(\Omega)$的定义对紧子集列$\{K_m\}_{m=1}^\infty$的依赖条件

$\varepsilon(\Omega)$的定义是依赖于紧子集列$\{K_m\}_{m=1}^\infty$的选择的,下面的定理给出了这种依赖关系.

定理 3 设$\{K_m\}_{m=1}^\infty,\{K'_{m'}\}_{m=1}^\infty$是两列相对于 Ω 的紧集,均满足(1.1)式. 则它们按(1.2)式生成的半模等价当且仅当如下两条成立:

(1°) $\forall\ m\in\mathbf{N},\exists\ m'\in\mathbf{N}$ 使得 $K_m\subset K'_{m'}$;

(2°) $\forall\ m'\in\mathbf{N},\exists\ m\in\mathbf{N}$ 使得 $K'_{m'}\subset K_m$.

证明 *充分性* 据(1°),(2°)立知定理 2 的两条件成立. 下面证必要性:

今设 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ 与 $\{K'_{m'}\}_{m=1}^\infty$ 按(1.2) 式生成的半模等价,如果(1°) 不成立,则存在 m_0 使得 $\forall\ m'\in\mathbf{N}$ 有 $K_{m_0}\not\subset K'_{m'}$. 于是存在 $x_{m'}\in K_{m_0}\backslash K'_{m'}$,今取开集 $O_{m'}\supset K'_{m'}$,$\mathrm{dist}(x_{m'},O_{m'})>0$,作 $\varphi_{m'}\in C^\infty(\Omega)$,满足

$$\begin{cases}\varphi_{m'}(x_{m'})=1,\\ \varphi_{m'}(x)=0,\quad\forall\ x\in O_{m'},\end{cases}$$

则 $\|\varphi_{m'}\|'_{n'}=0(\forall\ n'\leqslant m')$且 $\|\varphi_{m'}\|_{m_0}\geqslant 1$,所以按$\{\|\cdot\|'_{m'}\}$有 $\varphi_{m'}\to 0(m'\to 0)$而按$\{\|\cdot\|_m\}$有 $\varphi_{m'}\to 0(m'\to 0)$,这与此二半模等价矛盾,故(1°)成立. 同理可证(2°)成立. □

据此,很容易构造出两列相对于 Ω 的紧集,使它们满足(1.1)式但按(1.2)式生成的半模不等价. 这只要使之不满足定理 3 的(1°)或(2°)即可. 例如,对 $\Omega=(-1,1)$,可取

$$K_m:=[-1+\frac{1}{m+1},1-\frac{1}{m+1}]\backslash(0,\frac{1}{m+1})\quad(m=1,2,\cdots),$$

$$K'_{m'}:=[-1+\frac{1}{m+1},1-\frac{1}{m+1}]\backslash(-\frac{1}{m+1}\ ,0)\quad(m=1,2,\cdots),$$

则它们按(1.2)式生成的半模不等价.

因此,为了使 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义与紧集列 $\{K_m\}$ 的选择无关,应该给 $\{K_m\}$ 补加适当的条件.今考虑一特殊的紧集列:$K'_m:=\{x\in\Omega|\mathrm{dist}(x,\Omega^c)\leqslant\frac{1}{m}$ 且 $|x|\leqslant m\}$ $(m=1,2,\cdots)$,其中 Ω^c 表示 Ω 的余集.对满足(1.1)式的任一紧集列 $\{K_m\}$,为了使 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义与紧集列的选择无关,$\{K_m\}$ 应与上述 $\{K'_m\}$ 按(1.2)式生成等价的半模.于是根据定理3,$\forall\ m'\in\mathbf{N}$,$\exists\ m\in\mathbf{N}$ 使得 $K'_{m'}\subset K_m$.注意到对 Ω 中任一紧集 K,必存在 $m'\in\mathbf{N}$ 使得 $K\subset K'_{m'}$.因此存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $K\subset K_m$.

现在设 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ 与 $\{K'_{m'}\}_{m'=1}^{\infty}$ 是两串相对于 Ω 的紧集,适合(1.1)式.如果它们还满足:

$$\text{对 }\Omega\text{ 中任一紧集 }K\text{,存在 }m\in\mathbf{N}\text{ 使得 }K\subset K_m,\tag{3.1}$$

$$\text{对 }\Omega\text{ 中任一紧集 }K\text{,存在 }m'\in\mathbf{N}\text{ 使得 }K\subset K'_{m'},\tag{3.2}$$

那么容易看出它们满足定理3的条件,从而按(1.2)式生成的半模等价.

综上所述,得到:

定理4 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义与满足(1.1)式的紧集列 $\{K_m\}$ 的选择无关,当且仅当定义2中要求 $\{K_m\}$ 满足(3.1)式. □

因此 $\varepsilon(\Omega)$ 的定义应为:

定义3 设 Ω 是 R^n 中任一开集,$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一串相对于 Ω 的紧集,适合(1.1)式与(3.1)式.$\|\cdot\|_m$ 的定义如(1.2),$C^{\infty}(\Omega)$ 配备可数模 $\{\|\varphi\|_m\}_{m=1}^{\infty}$ 后的空间定义为 $\varepsilon(\Omega)$.显然该定义与 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的选择无关.

参 考 文 献

[1] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义(上册)[M]. 北京大学出版社,1987.

[2] Yosida K. *Functional Analysis* [M]. 5ed. Grun. der Math. Wissen., Springer-Verlag, 1978.

On the Definition of the Countable Modules Space

SUN Xing-ming[1], YANG Li-hua[2]

1. Department of Physics, Xiangtan Teachers' College, Huan 411201;

2. Math. Computer Science Department, Zhongshan University, Guangzhou 510275

Abstract: In this paper, we pointed out and proved that the definition of the countable module space $\varepsilon(\Omega)$ defined in [1] is dependent on the compact subsequences $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$. Meanwhile, we put forward a modified definition of the countable module space $\varepsilon(\Omega)$ which is independednt on the compact subsequences $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Key words: countable module space; $\varepsilon(\Omega)$.