第19卷第3期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 3
1999年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1999

完全分支数 $N(K_n,k)$ 卷积公式及分拆和的上界*

杨利民[1]， 王天明[2]

1. 大理师专数学系，云南 671000；
2. 大连理工大学应用数学系，116024

摘 要：得到了完全分支数 $N(K_n,k)$ 卷积公式，并讨论了分拆和的上界.

关键词：分支；卷积；分拆和.
分类号：AMS(1991) 05A18/CLC O157.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)03-0631-02

本文利用分拆和公式得到完全分支数 $N(K_n,k)$ 的卷积公式，并讨论分拆和上界.

定义 $\sigma(n,k)=\{1^{r_1},2^{r_2},\cdots,n^{r_n}\mid r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n,\sum\limits_{i=1}^{n}r_i=k,r_i\geqslant 0\}$，$f(r)$ 是定义在 $\{0,1,2,\cdots,n\}$ 上的函数，且 $f(0)=1$，记

$$S(f,k,n)=\sum_{r_1+\cdots+r_k=n}f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k),T(f,k,n)$$
$$=\sum_{\sigma(n,k)}f^{r_1}(1)f^{r_2}(2)\cdots f^{r_n}(r)/r_1!r_2!\cdots r_n!.$$

引理 1[1] 给定幂级数 $G(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g(k)t^k$，其中 $g(k)$ 是复系数，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}g(k)t^kS(f,k,n)=\sum_{k=1}^{\infty}G^{(k)}(t)t^kT(f,k,n),$$

$G^{(k)}(t)$ 是 $G(t)$ 的 k 次导数.

引理 2[2] 设 K_n 是完全图，则 K_n 的恰有 k 个分支理想子图个数

$$N(K_n,k)=\sum_{\substack{\sum ib_i=n\\ \sum b_i=k}}\frac{n!}{b!}\prod_{i=2}^{n}\frac{1}{b_i!(i!)^{b_i}}.$$

引理 3 给定幂级数 $G(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g(k)t^k$，$g(k)$ 是复系数，则有卷积公式

$$\sum_{k=0}^{\infty}G^{(k)}(t)t^k\Big(\sum_{\substack{\sum ib_i=n\\ \sum b_i=k}}\frac{n!}{b_1!}\prod_{i=2}^{n}\frac{1}{b_i!(i!)^{b_i}}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}g(k)t^kk^n.$$

* 收稿日期：1996-11-19；修订日期：1998-04-13
作者简介：杨利民(1965-)，男，白族，硕士，大理师专讲师.

定理 1 完全分支数 $N(K_n,k)$ 有卷积公式 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}\cdot k!\cdot N(K_n,k)=\sum_{k=1}^{\infty}t^k\cdot k^n$.

定理 2 设 K_n 的所有理想子图个数为 $A(K_n)$，则 $A(K_n)=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$.

引理 4 给定幂级数 $G(t)=\sum_{k=1}^{\infty}g(k)t^k$，$g(k)$ 是复系数，则有恒等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}g(k)t^k\binom{k+n-1}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}G^{(k)}(t)\sum_{\sigma(n,k)}\binom{k}{r_1,r_2,\cdots,r_n},$$

$G^{(k)}(t)$ 是 $G(t)$ 的 k 次导数.

定理 3 设 $G(t)=\frac{1}{1-t}$，$g(k)=1$，则有恒等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}t^k\binom{k+n-1}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}\sum_{\sigma(n,k)}\binom{k}{r_1,r_2,\cdots,r_n}.$$

定理 4 设 $f(x)$ 是上凸函数，且 $f(0)=1$，且在 $\{0,1,\cdots,n\}$ 上有定义，则

$$S(f,k,n)\leqslant f^k\left(\frac{n}{k}\right)\binom{n+k-1}{n}.$$

定理 5 设 $f(x)$ 是上凸函数，且在 $\{0,1,2,\cdots,n\}$ 上有定义，且 $f(0)=1$，则

$$T(f,k,n)\leqslant\frac{1}{k!}f^k\left(\frac{n}{k}\right)\sum_{\sigma(n,k)}\binom{k}{r_1,\cdots,r_n},$$

其中 $\sigma(n,k)=\{1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n}\mid r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n,\sum_{i=1}^{n}k_i=k,r_i\geqslant 0\}$.

参 考 文 献

[1] Hsu L C. *A Formula Convolutions and Fartition Sums* [J]. Jour. of Math. Res. & Expo., 1994, **4**: 546.

[2] Wang Tianming, Yang Limin. *Enumeration of Ideal Subgraphs* [C]. Graph, Combinationrics, Algorithms and Applications, Editde by Yousel Alavi DanR. K. Chung Rorald, L. Graham D. Frank Hsu.

[3] 谭明术，杨利民等译. 高等组合学 [M]. 王天明审校，大连理工大学出版社，1991 年.

[4] 杨利民. $S^{(n)}$-因子递归计数 [J]. 数学研究与评论，1991，11(1)：78.

[5] 杨利民. 理想子图计数及应用 [J]. 大连理工大学学报，1989，**29**(5)：605—609.