具有两个生成元的$SL_2(C)$的可解子群构造及对Fuchs系统的应用*

张绍飞[1]， 管克英[2]

（1. 北京航空航天大学应用数学系，北京 100083；
2. 北方交通大学应用数学系，北京 100044）

摘 要：本文给出$SL_2(C)$中具有两个生成元的可解子群的结构定理，并由单值群的可解性定义一类环面T^2上Fuchs系统的可积性，进而研究该系统的解的一些大范围性质.

关键词：特殊线性群；可解群；Fuchs系统；单值群；可积性.
分类号：AMS(1991) 20E05,34A20/CLC O152,O175.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)04-0704-05

1 引 言

设C是复数域，$GL_2(C)$为C上二阶一般线性群，$SL_2(C)$为C上二阶特殊线性群，即$GL_2(C)=\{A\in C^{2\times2}|\det A\neq0\}$，$SL_2(C)=\{A\in C^{2\times2}|\det A=1\}$. 任取$A,B\in SL_2(C)$，$G=\langle A,B\rangle$是由$A,B$生成的子群. 在此，先给出$G$作为可解子群的结构性定理，并通过一类Fuchs方程的单值群的可解性定义方程的可积性，进而讨论其解的Riemann曲面结构.

定理1 设$G=\langle A,B\rangle$是$SL_2(C)$的子群，则G为可解群. 当且仅当是以下两种情形之一：(Ⅰ) A,B可同时上(下)三角化；(Ⅱ) 存在可逆阵P使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&b\\-b^{-1}&0\end{pmatrix}.$$

为证明此定理，将引用以下一些已知的结论.

引理1[1] 设$T(n,C)$为$GL_n(C)$中全体上三角阵构成的群，则$T(n,C)$是可解群($n\geqslant2$).

引理2[2] 可解群的任何子群及商群均可解；设G是群，H为G的正规子群，且G/H及H均可解，则G必为可解群.

引理3[3](Bruhat分解定理) $SL_2(C)$中任一元均可唯一分解为以下两种形式之一：

$$\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0\\0&b^{-1}\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0\\0&b^{-1}\end{pmatrix}W\begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$$

* 收稿日期：1996-05-20；修订日期：1999-06-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19671009)
作者简介：张绍飞(1957-)，男，福建长汀人，硕士，北京航空航天大学副教授.

其中 $a,b,c \in \mathbf{C}, W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

对于矩阵 W，显然有 $W^2 = -I_2, W^3 = W^{-1} = -W, W^4 = I_2$(单位阵)，从而 $\langle W \rangle$ 为 4 阶循环群，且对任一 $A \in \mathrm{SL}_2(C)$，可直接验证 $WAW^{-1} = (A^T)^{-1}$.

引理 4[1]　设 G 为非循环自由群，则 G' 是秩无限的自由群(这里 $G' = [G,G]$ 为 G 的导子群或换位子群).

2　定理 1 的证明

首先可断言.

命题 1　A,B 可同时三角化，则 $G = \langle A,B \rangle$ 为可解群.

不难看出，A 与 B 可同时三角化 $\Leftrightarrow A$ 与 B 有公共的特征向量($n = 2$).

现考虑 A,B 的 Bruhat 分解，除同时可三角化外，不失一般性，可设：

$$A = \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & v \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} W.$$

命题 2　设 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$，则 $G = \langle A,B \rangle$ 是可解群.

证明　由 $[A,B] = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix} = A^2$，故有关系

$$AB = BA^{-1}. \tag{1}$$

又 $B^2 = -I_2$，从而有：

$$B^3 = -B, \quad B^4 = I_2, \quad B^{-1} = -B. \tag{2}$$

由关系(1)及(2)知，$\langle A,B \rangle = \{A^{n_1}B^{m_1}\cdots A^{n_k}B^{m_k} \mid n_i, m_i \in \mathbf{Z}, k \in N\} = \{\pm A^n B^\varepsilon \mid n \in \mathbf{Z}, \varepsilon = 0, 1\}$，任取 $U,V \in \langle A,B \rangle$，不难有 $[U,V] = UVU^{-1}V^{-1} \in \langle A \rangle$(循环群)，故 $G' = \langle A,B \rangle' \subseteq \langle A \rangle, G'' = I_2$. 所以 $G = \langle A,B \rangle$ 可解. □

命题 3　设 $A = \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} (u \neq 0, u \neq bi(a^{-1} - a)), B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} W$，则 $G = \langle A,B \rangle$ 为不可解群.

证明　可验证当 $u = \pm bi(a^{-1} - a)(a^2 \neq 1)$ 时，A 与 B 有公共特征向量，从而可同时三角化，为可解的情形，由条件 A,B 不可能同时三角化，由

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} W^{-1} \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -ub^{-2} & a \end{pmatrix} = A_1,$$

有 $A_1^m = BA^mB^{-1}$，从而有，$BA^m = A_1^m B, BA_1^m = A^m B$，故

$$\begin{aligned} \langle A,B \rangle &= \{A^{n_1}B^{m_1}A^{n_2}B^{m_2}\cdots A^{n_k}B^{m_k} \mid n_i, m_i \in \mathbf{Z}, k \in N\} \\ &= \{\pm A^{n_1}BA^{n_2}B\cdots A^{n_k}B^\varepsilon \mid n_i \in \mathbf{Z}, \varepsilon = 0,1\} \\ &= \{\pm A^{n_1}A_1^{n_2}\cdots A^{n_{k-1}}A_1^{n_k}, \pm A^{n_1}A_1^{n_2}\cdots A^{n_{l-1}}A_1^{n_l}B \mid n_i \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

令

$$G_1 = \langle A, A_1 \rangle = \{A^{n_1}A_1^{m_1}\cdots A^{n_k}A_1^{m_k} \mid n_i, m_i \in \mathbf{Z}\} = \langle A, BAB^{-1} \rangle \subseteq \langle A,B \rangle = G. \tag{4}$$

显然 G_1 是 G 的正规子群(由(3),(4)),且

$$G/G' = \langle A, B\rangle / \langle A, A_1\rangle \cong \{I_2, B, B^2, B^3\}$$

是4阶循环群,从而 $\langle A, A_1\rangle$ 与 $\langle A, B\rangle$ 的可解性等价.而由 A 及 A_1 的定义知 $G_1 = \langle A, A_1\rangle$ 为非循环自由群[2],由引理4 G'_1 为秩无限的自由群,故有以下推断:1° $G_1 > G'_1 > G''_1 > \cdots > G_1^{(n)} > \cdots$,2° 存在 n_0 使 $G_1^{(n_0)} = G_1^{(n_0+1)}$,$G_1^{(n_0)}$ 仍为秩无限的自由群.无论哪种情形 G_1 的换位子群列不可能在有限步终止于单位元群 $\langle I_2\rangle$,所以 G_1 从而 G 不可解. □

对于其余两种情形:$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}(a^2 \neq 1)$,$B = \begin{pmatrix} b & v \\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}W\ (v \neq 0)$ 以及 $A = \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}(u \neq 0)$,$B = \begin{pmatrix} b & v \\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}W\ (v \neq 0)$,类似命题3,$G = \langle A, B\rangle$ 均为不可解.

3 由单值群的可解性定义环面 T^2 上 Fuchs 型方程的可积性

一个 Fuchs 系统是否可积,是由通过该系统的单值群的可解性定义的,在这方面,俄罗斯数学家 Yu. S. Il'yashenko 已有了很好的叙述[4].在此将利用对 $SL_2(C)$ 可解子群的讨论,由可解单值群的结构,研究所对应的可积的二阶 Fuchs 方程解的一些大范围性质,也即其 Riemann 曲面的结构.以下考虑环面 T^2 上只有一个正则奇点的二阶 Fuchs 方程:

$$w'' + \lambda[\rho(z) + \sigma]w = 0, \tag{5}$$

其中 $w, z \in C$,λ, σ 是复参数,$\rho(z)$ 是周期为 2ω 与 $2\omega'$ 的 Weieretrass 椭圆函数[5]$(\mathrm{Im}\,\dfrac{\omega}{\omega'} \neq 0)$,并满足如下的微分方程:

$$\rho'^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3) \tag{6}$$

这里,$e_1 = \rho(\omega)$,$e_2 = \rho(\omega + \omega')$,$e_3 = \rho(\omega')$,$\rho(z)$ 在 $z = 0$ 及其等价点 $z = 2m\omega + 2n\omega'$ 处为二阶极点$(m, n \in \mathbf{Z})$,由于 $\rho(z)$ 为双周期函数,方程(5)可看成定义在由 $\rho(z)$ 的周期四边形将两组对边分别粘结起来所形成的环面 T^2 上,把挖去 $\rho(z)$ 的奇点的环面记为 T_0^2.

设 $\{\varphi(z), \psi(z)\}$ 为方程(5)的任一组基础解,则存在 $M(\omega), M(\omega') \in SL_2(C)$,使得:

$$(\varphi(z + 2\omega), \psi(z + 2\omega)) = (\varphi(z), \psi(z))M(\omega), \tag{7.1}$$

$$(\varphi(z + 2\omega'), \psi(z + 2\omega')) = (\varphi(z), \psi(z))M(\omega'). \tag{7.2}$$

由 $M(\omega), M(\omega')$ 生成 $SL_2(C)$ 的一个子群:

$$G = \langle M(\omega), M(\omega')\rangle, \tag{8}$$

G 即为方程(5)的单值群,它给出了 T_0^2 的基本群的一个线性表示.由(7.1)及(7.2)立即可得以下结论:

命题4 当且仅当存在正整数 n,使得:

$$M^n(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

时,方程(5)的基础解组中的 $\varphi(z)$ 具有周期 $2n\omega$;当且仅当

$$M^n(\omega') = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

时，$\varphi(z)$ 具有周期 $2n\omega'$，若以上 $u=0$，则基础解组中的 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 有相同的周期.

命题5 若存在正整数 m 和 n 使得

$$M^{-n}(\omega')M^{-m}(\omega)M^{n}(\omega')M^{m}(\omega)=\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则方程(5)基础解组中 $\varphi(z)$ 从正则点 z_0 出发，沿如下平形四边形闭路 $z_0\to z_0+2m\omega\to z_0+2m\omega+2n\omega'\to z_0+2n\omega'\to z_0$ 延拓，而且若在此闭路上无方程的奇点(此时闭路所围区域内恰有方程的 $m\times n$ 个奇点)，则当延拓一周后其值仍返回到出发点 z_0 的值 $\varphi(z_0)$，特别当 $m=n=1$ 时，可断定 $\varphi(z)$ 为单值函数，若以上方阵中 $u=0$，则基础解组中 $\psi(z)$ 也有与 $\varphi(z)$ 相同的大范围性质.

一般地，方程(5)的不同基础解组之间可由满秩线性变换 H 相联系，而 $(\tilde{\varphi}(z),\tilde{\psi}(z))=(\varphi(z),\psi(z))H$，易见原单值群 $G=\langle M(\omega),M(\omega')\rangle$ 及其生成元均经历同一共轭变换(相似变换)，故不失一般性我们可假定 $M(\omega)$ 为上三角阵.

从单值群的可解性直接定义相应 Fuchs 方程(5)的可积性[4]，由定理1及命题4、5，可将(5)的解的 Riemann 曲面结构作如下的分类：

定理2 若Fuchs方程(5)的单值群 G 可解，则方阵 $M(\omega)$(上三角阵)和 $M(\omega')$ 及方程解的 Riemann 曲面结构必为以下几种类型之一：

(Ⅰ) $M(\omega)=\pm I_2$，此时对任何 $M(\omega')\in SL_2(C)$，G 都是可解的，而方程的任何解都是单值周期函数，沿 ω 方向有周期 2ω(当 $M(\omega)=I_2$)或 4ω(当 $M(\omega)=-I_2$).

(Ⅱ) $M(\omega)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}(a^2\neq 1)$，$M(\omega')=\begin{pmatrix}b & v\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}(v\neq 0)$，

此时由 $M^{-1}(\omega')M^{-1}(\omega)M(\omega')M(\omega)=\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}(u\neq 0)$，故基础解组中的 $\varphi(z)$ 为单值函数.

(Ⅲ) $M(\omega)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}(a^2\neq 1)$，$M(\omega')=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}$，

此时方程(5)的解都是单值的.

(Ⅳ) $M(\omega)=\begin{pmatrix}a & u\\ 0 & a\end{pmatrix}(a^2=1,u\neq 0)$，$M(\omega')=\begin{pmatrix}b & v\\ 0 & b\end{pmatrix}(b^2=1)$，

此时方程(5)所有的解都是单值的，基础解组中 $\varphi(z)$ 为椭圆函数，沿 ω 方向有周期 2ω(当 $a=1$)或 4ω(当 $a=-1$)，沿 ω' 方向有周期 $2\omega'$(当 $b=1$)或 $4\omega'$(当 $b=-1$)；若 $v=0$，则 $\psi(z)$ 沿 ω' 方向也有周期 $2\omega'$ 或 $4\omega'$.

(Ⅴ) $M(\omega)=\begin{pmatrix}a & u\\ 0 & a\end{pmatrix}(a^2=1,u\neq 0)$，$M(\omega')=\begin{pmatrix}b & v\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}(b^2\neq 1)$，

这时方程(5)中 $\varphi(z)$ 是单值的，且沿 ω 方向有周期 2ω(当 $a=1$)或 4ω(当 $a=-1$).

以上5类均属可同时三角化的情形，除此之外还有：

(Ⅵ) $M(\omega)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}(a=\pm i)$，$M(\omega')=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b^{-1} & 0\end{pmatrix}$，

此时，由于 $M^4(\omega)=M^4(\omega')=I_2$，故方程(5)的任何解都是双周期的，沿 ω 方向有周期 8ω，沿 ω' 方向有周期 $8\omega'$，又因 $M(\omega)$ 与 $M(\omega')$ 的换位子等于 $-I_2$，故(5)的奇点是所有解的二次代数枝点.

(Ⅶ) $M(\omega)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}(a^4\neq 1), M(\omega')=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

由于 $M^4(\omega')=I_2$,方程(5)的任何解沿 ω' 方向都有周期 $8\omega'$,又因

$$M^{-2}(\omega')M^{-1}(\omega)M^2(\omega')M(\omega)=I_2,$$

方程的任何解从正则点 z_0 出发,沿无奇点的平行四边形闭路 $z_0\to z_0+2\omega\to z_0+2\omega+4\omega'\to z_0+4\omega'\to z_0$ 延拓一周后其值仍返回原值.

最后,提出两个猜想:1. 对 $SL_n(C)$ 中任何可解子解 G,其导出长度 是否不超过 n? 2. $SL_2(C)$ 中任取定 A,B,是否有适当的椭圆函数 $\rho(z)$ 及参数 λ,σ 使得 A,B 恰可作为方程(5)的单值解 G 的两个生成元?

参考文献:

[1] DEREK. J. S. ROBINSON. *A Course in the Theory of Groups* [M]. Springer-Verlag New York, 1982.

[2] SERGE L. *Algebra* [M]. Second Editon. Addison-Wesley Publishing Company. Inc. 1984.

[3] SERGE L. $SL_2(R)$ [M]. Springer-Verlag, New York. Berlin, 1985.

[4] YU. S. Il'yashenko. *Ordinary Differential Equation, Dynamical System I* [M]. Springer-Verlag. Berlin 1988.

[5] BRUCE P P. *An Introduction to Complex Function Theory* [M]. Springer-Verlag New York, 1991.

Structure of Solvable Subgroup with Two Generators in $SL_2(C)$ and Its Application to Fuchsian System

ZHANG Shao-fei[1], GUAN Ke-ying[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083;
2. Northern Jiaotong Univ., Beijing 100044)

Abstract: This paper gives structure theorem of solvable subgroup generated by two elements in $SL_2(C)$, defines Fuchsian system's integrability on ring surface T^2 by solvability of monodromy group and discusses some global properties of the system's solution.

Key words: special linear group; solvable group; Fuchsian system; monodromy group; integrability.